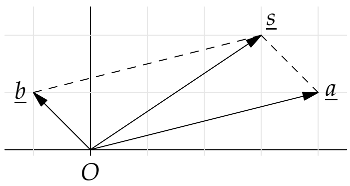
15

Uitwerkingen Lineaire Algebra

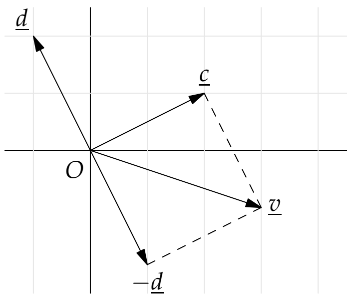
15.1 Uitwerkingen hoofdstuk 1

1.



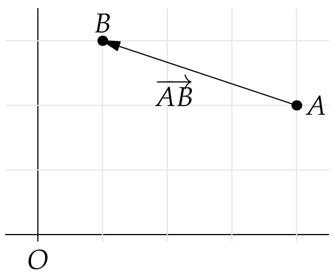
Figuur 15.1: De som van twee vectoren

2.



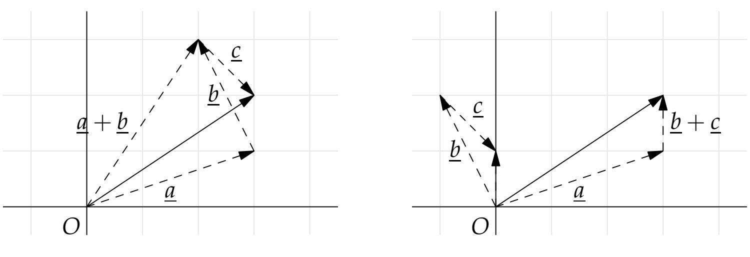
Figuur 15.2: Het verschil van twee vectoren

3.



Figuur 15.3: De vector van A naar B

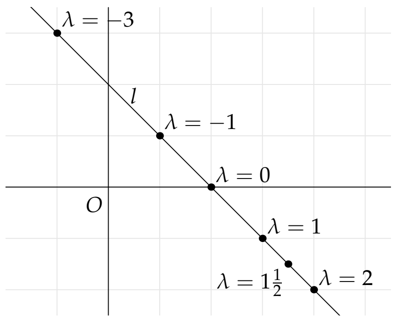
4.



(a) $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ (b) $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

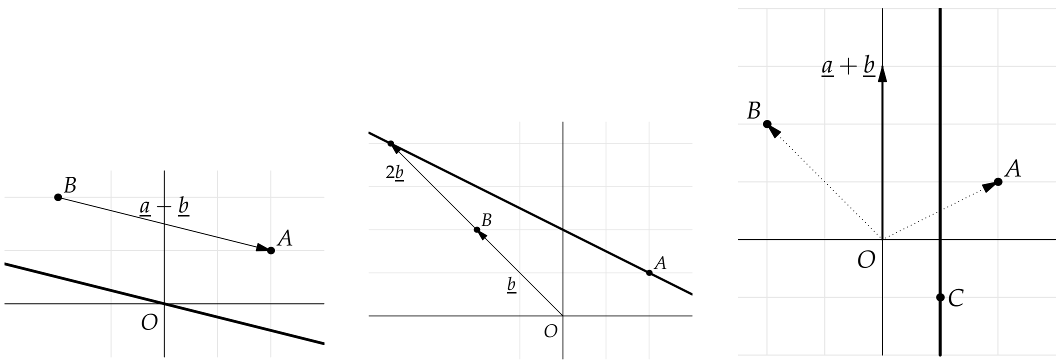
5. De vector $\underline{u}$ loopt van S naar Q. Je kunt van S naar Q gaan via de volgende route: $S \to O \to P \to Q$, dus achtereenvolgens langs de vectoren $-\underline{c}$, $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Dus $\underline{u} = -\underline{c} + \underline{a} + \underline{b}$.
De vector $\underline{v}$ loopt van Q naar R. Je kunt van Q naar R gaan via de route: $Q \to P \to O \to S \to R$. Dus achtereenvolgens via $-\underline{b}$, $-\underline{a}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$. Dus $\underline{v} = -\underline{b} - \underline{a} + \underline{c} + \underline{d}$.

6.



Figuur 15.4: Lijn met 6 punten

7.



(a) (b) (c)

d. Een steunvector is $\underline{a} = \binom{2}{1}$, een richtingsvector is $\underline{a} - \underline{c} = \binom{1}{2}$. Dus AC: $\underline{x} = \binom{2}{1} + \lambda\binom{1}{2}$.
e. Er geldt: $\underline{b} = -2\underline{c}$, dus $\underline{b}$ en $\underline{c}$ liggen in elkaars verlengde. De lijn BC gaat door O: $\underline{x} = \lambda\binom{1}{-1}$.
f. $\underline{x} = \binom{2}{1} + \lambda\binom{1}{-1}$.

8. a. Als $x = 3$, is $3 = 1 + 2\lambda$ en dus $\lambda = 1$. Hieruit volgt $y = -1 + 1 \cdot 3 = 2$. Als $y = 8$, is $8 = -1 + 3\lambda$ en dus $\lambda = 3$. Hieruit volgt $x = 1 + 3 \cdot 2 = 7$.
b. Nee. Wegens $x = 4$ volgt uit $1 + 2\lambda = 4$ dat $\lambda = \frac{3}{2}$, maar dan is $y = -1 + \frac{3}{2} \cdot 3 \neq 5$.
c. Ja, $\lambda = -1$.
d. Nee. Wegens $x = -11$ volgt uit $1 + 2\lambda = -11$ dat $\lambda = -6$, maar dan is $y = -1 + -6 \cdot 3 \neq -28$.

9. a. $\binom{2}{5}$ is richtingsvector van l, dus $\binom{1}{2\frac{1}{2}}$ ook, dus de richtingscoëfficiënt van l is $2\frac{1}{2}$. Een punt van l is $(1, -1)$. De vergelijking van l is $y - (-1)) = 2\frac{1}{2}(x - 1)$, oftewel $y = 2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$.

b. $\binom{x}{y} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{2}{5}$.

10. Vectorvoorstelling is $\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{a} - \underline{b})$, oftewel $\binom{x}{y} = \binom{1}{4} + \lambda\binom{2}{3}$.
Uit richtingsvector $\binom{2}{3}$ volgt richtingscoëfficiënt $= 1\frac{1}{2}$, dus vergelijking is $y - 4 = 1\frac{1}{2}(x-1)$, oftewel $y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

11. Richtingscoëfficiënt is $\frac{7}{3}$, dus richtingsvector is $\binom{1}{7/3}$ of $\binom{3}{7}$.
$(1,0)$ is een punt van de lijn. Een vectorvoorstelling is $\binom{x}{y} = \binom{1}{0} + \lambda\binom{3}{7}$.

15.2 *Uitwerkingen hoofdstuk 2*

12. Ik gebruik eerst het getal -1 linksboven in de matrix om de eerste kolom schoon te vegen, en vervolgens het getal -1 in het midden om de tweede nul in de onderste rij te maken:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-1} & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \times 2 & \times 1 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 8 \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right)$$

Uit de onderste rij volgt: $z = 1$, uit de tweede rij: $y = 1$ en uit de eerste rij: $x = 0$. De oplossing is dus $(0, 1, 1)$

13. Als je de matrix van het stelsel opschrijft komt er een nul linksboven:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Bovendien zie je dat je de getallen in de tweede rij door 2 kunt delen. Het is vaak (maar niet altijd) verstandig de getallen zo klein mogelijk te maken. De tweede rij door 2 delen en de eerste en tweede rij verwisselen levert:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times -1 \\ \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Je ziet nu dat de tweede en derde rij een factor -1 verschillen: de bijbehorende vergelijkingen zijn *afhankelijk*. Wanneer je de ene rij bij de andere optelt, krijg je een *nulrij*:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zo'n nulrij bevat geen echte informatie, wat overblijft zijn twee vergelijkingen met drie variabelen. Je kunt een van de variabelen vrij kiezen, bijvoorbeeld $z = \lambda$. Als je dit invult in de tweede rij krijg je $y = 1 + \lambda$. Als je $z = \lambda$ invult in de bovenste rij krijg je $x = -1 + 3\lambda$. De oplossing zijn dan: $(-1 + 3\lambda, 1 + \lambda, \lambda)$, met $\lambda \in \mathbb{R}$.

14. In de matrix van dit stelsel staat linksboven niet een 1. Je zou de bovenste rij door 2 of door -2 kunnen delen, maar dan ontstaan

er breuken, en dat rekent lastiger. Het is in dit geval ook niet nodig door 2 te delen, omdat je met -2 ook uitstekend kunt vegen:

Hoewel de opgaven vaak zo zijn geconstrueerd dat je de uitwerking met uitsluitend gehele getallen kunt maken, zijn breuken soms onvermijdelijk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & -9 & -4 & -1 \\ 6 & -9 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \times 2 & \times 3 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Er is vanzelf een tweede nul in de onderste rij ontstaan. De oplossing is $z = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ en $x = 1$, oftewel $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

15. De vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk stellen leidt tot:

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda = 5 - 2\mu \\ 4 + \lambda = -7 + 5\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ \lambda - 5\mu = -11 \end{cases}$$

Na delen door 2 van de eerste vergelijking krijg je de volgende aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times -1 \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -12 \end{array}\right)$$

De oplossing is $\mu = 2$ en $\lambda = -1$. Dit invullen in een of beide vectorvoorstellingen levert als snijpunt: $S(1, 3)$.

16. De x- en y-component uit de vectorvoorstelling invullen in de vergelijking levert: $3(1 + 4\lambda) + 2(2 - \lambda) = -3$. Oftewel $\lambda = -1$. Dit invullen in de vectorvoorstelling geeft als snijpunt $S(-3, 3)$.

17. De y-component uit de vectorvoorstelling invullen in de vergelijking levert: $3 + 5\lambda = 8$. Oftewel $\lambda = 1$. Dit invullen in de vectorvoorstelling geeft als snijpunt $S(0, 8)$.

18. a. De twee lijnen zijn evenwijdig als ze dezelfde richting hebben, dus als de richtingsvector van de ene lijn een veelvoud is van die van de andere lijn. Dus in dit geval als $\binom{p}{-2} = \alpha\binom{3}{1}$, waarbij α een of ander getal ongelijk nul is. Als je y-componenten met elkaar vergelijkt, zie je dat $\alpha = -2$, en dus $p = -6$.
    b. Of ze behalve evenwijdig zijn ook samenvallen, kun je controleren door te zien of een punt van de ene lijn op de andere lijn ligt. Zo niet, dan vallen ze niet samen. Je kunt bijvoorbeeld kijken of het steunpunt $(0, 2)$ van l op m ligt: $\binom{0}{2} = \binom{-3}{1} + \mu\binom{-6}{-2}$. Dit klopt voor $\mu = \frac{1}{2}$. Dus ligt $0, 2)$ ook op m, en hebben de evenwijdige lijnen l en m een gemeenschappelijk punt, en dus vallen ze samen.

19. a. Er geldt $\underline{r}_m = \binom{2}{-2} = 2\binom{1}{-1} = 2\underline{r}_l$, dus de richtingsvector van m is een veelvoud van de die van l (en omgekeerd). De coördinaten van het steunpunt van m voldoen aan de vectorvoorstelling van l: $\binom{2}{-3} = \binom{4}{-5} + \mu\binom{2}{-2}$ voor $\lambda = 2$, dus vallen de lijnen samen.

b. Maak eerst een vectorvoorstelling van de vergelijking $5x - 2y = 13$ van m. Je kunt één variabele vrij kiezen. Stel bijvoorbeeld $x = 2\mu$, als je dit invult in de vergelijking volgt:

$$\begin{cases} x \phantom{{}-2y} = 2\mu \\ 10\mu - 2y = 13 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2\mu \\ 2y = -13 + 5\mu \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 + 2\mu \\ y = -\frac{13}{2} + 5\mu \end{cases}$$

Een vectorvoorstelling van m is dus $\binom{x}{y} = \binom{0}{-13/2} + \mu\binom{2}{5}$. De richtingsvector is gelijk aan die van l, dus de lijnen zijn evenwijdig. Het steunpunt $(-1, 3)$ ligt echter niet op m: $x = -1$ invullen in $x = 2\mu$ levert $\mu = -\frac{1}{2}$. Dit invullen in $y = -\frac{13}{2} + 5\mu$ levert $y = -9$, en dit is niet gelijk aan de y-coördinaat van het steunpunt, die 3 is.

20. Deel de tweede vergelijking (rij) door 3, en verwissel de eerste en de laatste vergelijking (rij), zodat de 1 linksboven komt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{ll} \times -2 & \times -3 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 1\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

In de laatste twee rijen staan strijdige vergelijkingen, als je ze van elkaar aftrekt krijg je $0 = \frac{1}{2}$. Er zijn dus geen oplossingen voor dit stelsel.

21.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 7 & -2 & -17 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & -10 & 5 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{lll} \times 3 & \times 4 & \times 2 \\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -13 & 8 & 32 \\ 0 & 9 & -16 & 7 & 30 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \\ \times -6 & \times -9 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times 2 \\ \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Uit de laatste rij volgt: $x_4 = 5$. En uit de overige rijen: $x_3 = 2$, $x_2 = 3$ en $x_1 = -2$. De oplossing is dus $(-2, 3, 2, 5)$.

22.
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{lll} \times 2 & \times 1 & \times 3 \\ & & \\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \\ \times -1 & \times -2\frac{1}{2} \\ \hookleftarrow & \\ & \\ & \hookleftarrow \end{array} \to$$

De eerste kolom is schoon. Veeg nu de tweede kolom schoon:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1\frac{1}{2} & -2 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times -5 \\ \\ \times 4 \end{array}$$

Je zou de derde rij met $-\frac{5}{4}$ kunnen vermenigvuldigen en dan vegen. Er ontstaan dan wel veel breuken, en deze grote matrix is al lastig genoeg. Ik kies er daarom voor de rijen met -5 en met 4 te vermenigvuldigen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-20} & -10 & 5 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -6 & -8 & -28 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times 1 \rightarrow \\ \\ \hookleftarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -10 & 5 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -3 & -58 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times -\frac{1}{5} \rightarrow \\ \times 16 \\ \hookleftarrow \end{array}$$

De derde rij heeft zijn werk gedaan, en kan weer terug naar de kleinere getallen. Verder nog de vierde kolom vegen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29 & -58 \end{array}\right)$$

In de laatste rij staat $x_5 = -2$. De vierde rij zegt $x_4 - 4 = 0$, dus $x_4 = 4$. De derde rij zegt $4x_3 + 8 + 2 = 6$, dus $x_3 = -1$. De tweede rij geeft $2x_2 + 4 - 4 = 2$, dus $x_2 = 1$. In de eerste rij staat $-x_1 + 1 - 1 + 4 - 2 = 2$ oftewel $x_1 = 0$. De Oplossing is $(0, 1, -1, 4, -2)$.

15.3 *Uitwerkingen hoofdstuk 3*

23. a. $\sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

    b. $\sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{19}$

    c. $\sqrt{7^2 + 25^2} = \sqrt{674}$

    d. $\sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

24. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{3}{1} - \binom{-1}{4} = \binom{4}{-3}$, dus $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.
    $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = \binom{2}{4} - \binom{-1}{4} = \binom{3}{0}$, dus $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9} = 3$.
    $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b} = \binom{2}{4} - \binom{3}{1} = \binom{-1}{-3}$, dus $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{10}$.

25. a. $\cos\phi = \dfrac{3 \cdot 12 + 4 \cdot -5}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \dfrac{16}{65}$, dus $\phi = \arccos\left(\dfrac{16}{65}\right) \approx 76°$.

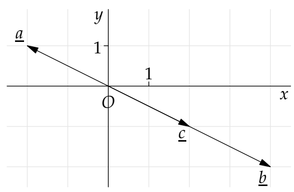
    b. $\cos\phi = \dfrac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\phi = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 45°$.

    c. $\cos\phi = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot -7}{\sqrt{5}\sqrt{50}} = \dfrac{-5}{5\sqrt{10}} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$, dus $\phi = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\right) \approx 108°$.

26. Zie figuur 15.5

    $\cos\angle(\underline{a}, \underline{b}) = \dfrac{-8-2}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = \dfrac{-10}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{4}} = -1$, dus $\phi = \arccos(-1) = 180°$.

    $\cos\angle(\underline{b}, \underline{c}) = \dfrac{8+2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = 1$, dus $\phi = \arccos(1) = 0°$.

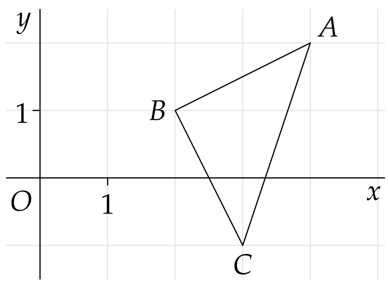


Figuur 15.5: De drie vectoren zijn afhankelijk

27. Elk veelvoud van een van de volgende vectoren staat loodrecht op de gegeven vector:

a. $\binom{5}{-3}$ b. $\binom{4}{1}$ c. $\binom{1}{1}$ d. $\binom{0}{1}$

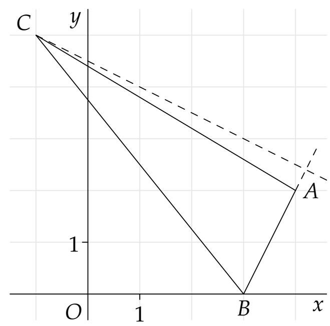
28.



$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{2}{1} - \binom{4}{2} = \binom{-2}{-1}$, dus $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5}$
$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b} = \binom{3}{-1} - \binom{2}{1} = \binom{1}{-2}$, dus $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$
Dus $AB = BC$. Verder is $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \cdot 1 - 1 \cdot -2 = 0$, dus $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

29. $\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \dfrac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$, dus $\angle(\underline{a}, \underline{b}) = 60°$.

30. Zie figuur 15.6
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{4}{2} - \binom{3}{0} = \binom{1}{2}$, dus een normaalvector van $\overrightarrow{AB}$ is $\underline{n} = \binom{2}{-1}$. Dus een vectorvoorstelling van de hoogtelijn door C is $\underline{x} = \underline{c} + \lambda \underline{n} = \binom{-1}{5} + \lambda\binom{2}{-1}$.
De vector $\underline{b} - \underline{a} = \binom{1}{2}$ is een normaalvector van de hoogtelijn, dus een vergelijking van de hoogtelijn is $\binom{1}{2} \cdot \underline{x} = \binom{1}{2} \cdot \underline{c}$, oftewel $x + 2y = 9$.



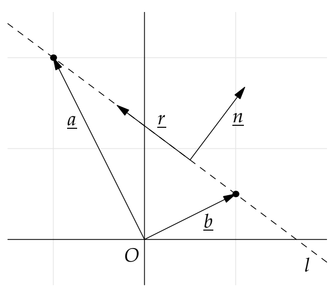
Figuur 15.6: Hoogtelijn uit C

31. a. Een normaalvector van $l\colon 3x + 4y = 5$ is $\binom{3}{4}$, dus een richtingsvector van l is $\binom{4}{-3}$. Een steunvector is bijvoorbeeld $\binom{-1}{2}$, dus een vectorvoorstelling is $l\colon \binom{x}{y} = \binom{-1}{2} + \lambda\binom{4}{-3}$.
b. Een normaalvector van l is $\binom{3}{4}$, en dat is een richtingsvector van m. Omdat m door O gaat, is $\underline{x} = \mu\binom{3}{4}$ een vectorvoorstelling van m.

32. a. Een normaalvector van l is $\underline{n} = \binom{1}{0}$, en l gaat door het punt $P(2, 1)$, dus een vergelijking is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{np}$, oftewel $x = 2$
b. Een normaalvector van m is $\underline{n} = \binom{0}{1}$, en m gaat door het punt $Q(-2, 3)$, dus een vergelijking is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{nq}$, oftewel $y = 3$

33. a. Een normaalvector van k is $\binom{1}{-4}$, een richtingsvector is $\binom{4}{1}$. k gaat door bijvoorbeeld $(1, 0)$, dus een vectorvoorstelling is $\underline{x} = \binom{1}{0} + \kappa\binom{4}{1}$
b. $l\colon (\underline{x}) = \binom{2}{0} + \lambda\binom{5}{-3}$.
c. $m\colon (\underline{x}) = \binom{4}{0} + \mu\binom{0}{1}$.

34. Zie figuur 15.7. De normaalvector $\underline{n} = \binom{3}{4}$ staat loodrecht op de *richtingsvector* van l. Een richtingsvector is bijvoorbeeld $\underline{r} = \binom{-4}{3}$. De vector $\underline{v} = \binom{x}{y}$ wijst een (willekeurig) punt van de lijn aan, maar omdat de lijn niet door O gaat, is $\underline{v}$ niet evenwijdig aan $\underline{r}$, en dus staat $\underline{n}$ ook niet loodrecht op $\underline{v}$.



Figuur 15.7: $\underline{n}$ staat niet loodrecht op $\underline{a}$ of op $\underline{b}$, maar wel op de richtingsvector van l

35. De lijn l_1 met richtingscoëfficiënt m_1 heeft richtingsvector

$\underline{r}_1 = \binom{1}{m_1}$. Evenzo heeft l_2 richtingsvector $\underline{r}_2 = \binom{1}{m_2}$. Wegens (3.11) geldt: $l_1 \perp l_2$ dan en slechts dan als $\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = 0$ ($\underline{r}_1$ en $\underline{r}_2$ zijn allebei niet de nulvector). Uit $\binom{1}{m_1} \cdot \binom{1}{m_2} = 0$ volgt $1 + m_1 m_2 = 0$, oftewel $m_1 m_2 = -1$.

36. a. $\underline{x} = \binom{-2}{6} + \lambda\binom{3}{1}$
    b. $\underline{x} = \binom{-2}{6} + \lambda\binom{-1}{3}$

37. Een normaal van l is $\underline{n} = \binom{2}{-3}$, dus de gevraagde vergelijking is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{p}$, oftewel $2x - 3y = 5$.

38. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$, dit invullen in de tweede component van de vectorvoorstelling levert $0 = 3 + \lambda$, dus $\lambda = -3$. Dit invullen levert $x = -17$. Dus $S(-17, 0)$. De richtingsvector van l is normaalvector van de lijn loodrecht op l. Dus een vergelijking van de lijn van de lijn door S loodrecht op l is $5x + y = -85$.

39. $\underline{b} - \underline{a} = \binom{-3}{1}$ is normaalvector van bedoelde lijn, dus een vergelijking is $-3x + y = 0$

40. $\underline{n}_l = \binom{2}{-1}$, dus $\underline{n}_k = \binom{1}{2}$. Dus een vergelijking van k is: $x + 2y = 2$. Oplossen van het stelsel

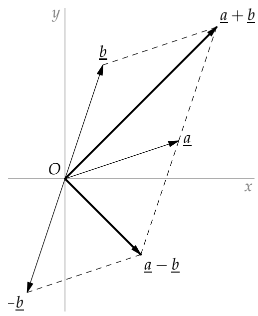
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

levert het snijpunt $(2, 0)$

41. Zie figuur 15.8.
Stel $\underline{a} = \binom{a_1}{a_2}$ en $\underline{b} = \binom{b_1}{b_2}$. Dan is het inproduct van $\underline{a} + \underline{b}$ en $\underline{a} - \underline{b}$ gelijk aan:

$$\begin{aligned}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) &= \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2} \cdot \binom{a_1-b_1}{a_2-b_2} \\ &= (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 - b_2) \\ &= a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2) \\ &= |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0, \qquad \text{wegens } |\underline{a}| = |\underline{b}|\end{aligned}$$

Dus geldt $(\underline{a} + \underline{b}) \perp (\underline{a} - \underline{b})$.



Figuur 15.8: $(\underline{a} + \underline{b}) \perp (\underline{a} - \underline{b})$

15.4 *Uitwerkingen hoofdstuk 4*

42. a. Pas formule (4.2) toe met: $\underline{r}_k = \binom{4}{-1}$ en $\underline{r}_l = \binom{1}{6}$.
    Dus $\cos\phi = \frac{|4 \cdot 1 - 1 \cdot 6|}{\sqrt{16+1}\sqrt{1+36}} \approx 0.0797$. Dus $\phi \approx 85°$.
    b. Pas formule (4.3) toe met: $\underline{n}_m = \binom{3}{4}$ en $\underline{n}_n = \binom{2}{-1}$.
    Dus $\cos\phi = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot -1|}{\sqrt{9+16}\sqrt{4+1}} \approx 0.1789$. Dus $\phi \approx 80°$.
    c. Pas formule (4.2) toe met: $\underline{r}_p = \binom{2}{1}$ en $\underline{r}_q = \binom{3}{-1}$.
    Dus $\cos\phi = \frac{|7 \cdot 3 + 1 \cdot -1|}{\sqrt{49+1}\sqrt{9+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.8944$. Dus $\phi \approx 27°$.

43. Bereken de afstand van $A(2, -3)$ tot de volgende lijnen:
    a. Een normaalvorm voor l is $3x + 4y = -8$. Wegens (4.4) geldt:
    $d(A, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot -3 + 8|}{\sqrt{9+16}} = \frac{2}{5}$

b. $d(A,m) = \frac{|2\cdot 2-3\cdot -3-13|}{\sqrt{4+9}} = 0$ (dus A ligt op l)
c. $d(A,n) = 8$ (maak een tekening)

44. $d(A,l) = \frac{|3\cdot a-4\cdot 2-11|}{\sqrt{9+16}} = 5$, oftewel $|3a-19| = 25$.
Dus $3a-19 = 26 \vee 3a-19 = -25$. Dus $a = 14\frac{2}{3} \vee a = -2$.

45. Stel $P(p_1, p_2)$ ligt op l. Dan geldt: $p_1 = 1+\lambda$ en $p_2 = 1+3\lambda$.
Dan is $d(P,m) = \frac{|3\cdot(1+\lambda)-4\cdot(1+3\lambda)-10|}{\sqrt{9+16}} = 4$, oftewel $|9\lambda+11| = 20$.
Dus $9\lambda+11 = 20 \vee 9\lambda+11 = -20$. Dus $\lambda = 1 \vee \lambda = -\frac{31}{9}$. Uit $\lambda = 1$ volgt $p_1 = 2$ en $p_2 = 4$. Uit $\lambda = -\frac{31}{9}$ volgt $p_1 = -2\frac{4}{9}$ en $p_2 = -9\frac{1}{3}$. Dus $P_1(2,4)$ en $P_2(-2\frac{4}{9}, -9\frac{1}{3})$ zijn de gevraagde punten.

46. De lijnen moeten evenwijdig lopen met l, dus de normaalvorm van deze lijnen is $12x-5y = p$. Een punt op een dergelijke lijn is $P(\frac{p}{12}, 0)$.
Er geldt: $d(P,l) = \frac{|12\cdot\frac{p}{12}-5\cdot 0-2|}{\sqrt{144+25}} = 1$, oftewel $|p-2| = 13$.
Dus $p = 15 \vee p = -11$. De gevraagde vergelijkingen zijn $12x-5y = 15$ en $12x-5y = -11$.

47. a. De drie zwaartelijnen:
$z_c\colon \underline{x} = \underline{c} + \lambda(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b} - \underline{c})$
$z_B\colon \underline{x} = \underline{b} + \mu(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{c} - \underline{b})$
$z_A\colon \underline{x} = \underline{a} + \nu(\frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c} - \underline{a})$

ν is de Griekse letter *nu*, zie het Griekse alfabet achterin het boek.

b. Het snijpunt van z_A en z_B wordt bepaald door
$\underline{a} + \nu(\frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c} - \underline{a}) = \underline{b} + \mu(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{c} - \underline{b})$
Overeenkomstige vectoren links en rechts vergelijkend levert:

$$\begin{cases} \underline{a} - \nu\underline{a} = \frac{1}{2}\mu\underline{a} \\ \frac{1}{2}\nu\underline{b} = \underline{b} - \mu\underline{b} \\ \frac{1}{2}\nu\underline{c} = \frac{1}{2}\mu\underline{c} \end{cases}$$

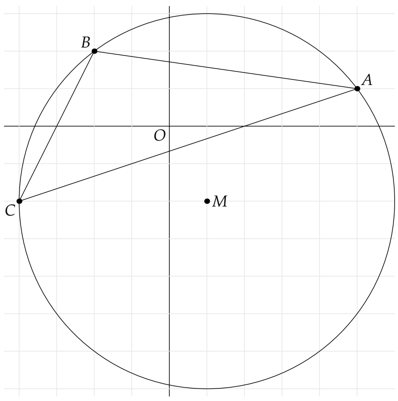
Uit de laatste vergelijking volgt $\nu = \mu$. Dit invullen in de eerste (of in de tweede) vergelijking levert: $1-\mu = \frac{1}{2}\mu$, dus $\mu = \frac{2}{3}$. En dus ook $\nu = \frac{2}{3}$.
De vector bij het snijpunt is dus:
$\underline{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c} - \underline{a}) = \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} + \frac{1}{3}\underline{c}$.

c. Neem $\lambda = \frac{2}{3}$, en vul dit in in de vectorvoorstelling van z_C. Je krijgt dan $\underline{x} = \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} + \frac{1}{3}\underline{c}$. Dus Z met $\underline{z} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ ligt op elk van de drie zwaartelijnen. Met andere woorden: de drie zwaartelijnen gaan door één punt, het zwaartepunt Z.
Uit dit alles volgt ook dat Z elk van de zwaartelijnen verdeelt in de verhouding $\frac{1}{3}$ staat tot $\frac{2}{3}$, oftewel $1:2$.

48. a. $\underline{z} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \frac{1}{3}\left[\binom{-2}{5} + \binom{4}{4} + \binom{1}{0}\right] = \frac{1}{3}\binom{3}{9} = \binom{1}{3}$. Het punt $P(1,3)$ ligt inderdaad op l ($\lambda = -2$.)
b. $\underline{z}_C = \underline{c} + \lambda\left(\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{c}\right) = \binom{1}{0} + \lambda\left(\frac{1}{2}\left[\binom{-2}{5} + \binom{4}{4}\right] - \binom{1}{0}\right) = \binom{1}{0} + \lambda\binom{0}{4\frac{1}{2}} = \binom{1}{0} + \mu\binom{0}{1}$ (dit is de lijn $x = 1$)). Een willekeurig punt op de zwaartelijn vanuit C is dus $P(1,\mu)$.
$PA = \sqrt{(1--2)^2 + (\mu-5)^2} = \sqrt{\mu^2 - 10\mu + 34}$.

$PC = \sqrt{(1-1)^2 + (\mu - 0)^2} = \sqrt{\mu^2}$.
$PA = PC \iff \mu^2 - 10\mu + 34 = \mu^2 \iff \mu = 3.4$.
Dus $P(1, 3.4)$ is het gevraagde punt.

49.

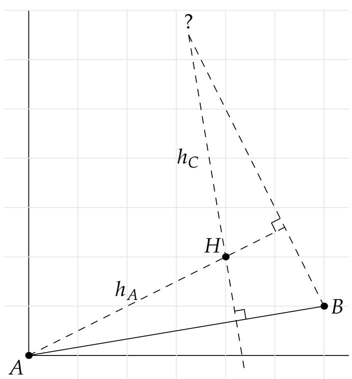


Figuur 15.9: De omgeschreven cirkel van driehoek ABC

Middelloodlijn van AB: $\underline{n}_{m_{AB}} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{-2}{2} - \binom{5}{1} = \binom{-7}{1}$.
Voor het midden van AB geldt: $\underline{m}_{AB} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Met (3.13) volgt: $-7x + y = -9$ of $7x - y = 9$ is een vergelijking van de middelloodlijn.
Middelloodlijn van AC: $\underline{n}_{m_{AC}} = \underline{c} - \underline{a} = \binom{-4}{-2} - \binom{5}{1} = \binom{-9}{-3}$, dus ook is $\binom{3}{1}$ een normaalvector. Voor het midden van AC geldt: $\underline{m}_{AC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Met (3.13) volgt: $3x + y = 1$ is een vergelijking van de middelloodlijn van AC. Snijden met de andere middelloodlijn levert $x = 1$ en $y = -2$. Dus het middelpunt van de omgeschreven cirkel is $M(1, -2$.

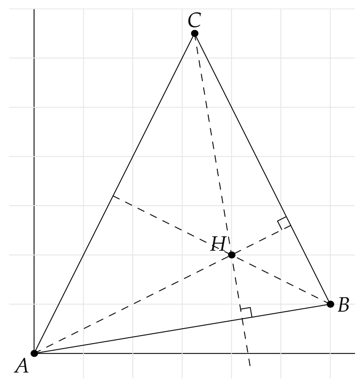
50. De hoogtelijn h_B vanuit B op AC: $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = \binom{-6}{-8}$. Dus een normaalvector van h_B is $\binom{3}{4}$. De lijn gaat door $B(6, -4)$, dus met (3.13) volgt: $h_B: 3x + 4y = 2$.
De hoogtelijn h_C vanuit C op AB: $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{4}{-8}$. Dus een normaalvector van h_C is $\binom{1}{-2}$. De lijn gaat door $C(-4, -4)$, dus met (3.13) volgt: $h_C: x - 2y = 4$.
Het snijpunt van $3x + 4y = 2$ en $x - 2y = 4$ is $H(2, -1)$.

51. Zie figuur 15.10.



Figuur 15.10: De lijn door BC staat loodrecht op de hoogtelijn vanuit A

$\overrightarrow{AB} = \binom{6}{1}$ is normaalvector van h_C. Verder gaat h_C door $H(4,2)$, dus met (3.13) volgt: $h_C\colon 6x + y = 26$. De lijn l door BC staat loodrecht op h_A. Een richtingsvector van h_A is $\underline{h} - \underline{a} = \binom{4}{2}$ of ook $\binom{2}{1}$. Dus een richtingsvector van l_{BC} is $\binom{1}{-2}$. l_{BC} gaat door $B(6,1)$ dus $l_{BC}\colon \binom{x}{y} = \binom{6}{1} + \lambda\binom{1}{-2}$.
Hieruit volgt voor de punten op l_{BC}: $x = 6 + \lambda$ en $y = 1 - 2\lambda$. Dit invullen in de vergelijking van h_C levert het snijpunt C: $6(6+\lambda) + (1-2\lambda) = 26$, dus $\lambda = -\frac{11}{4}$. Invullen in de vectorvoorstelling van l_{BC} levert $x = 3\frac{1}{4}$ en $y = 6\frac{1}{2}$. Dus $C(3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$. Zie figuur 15.11.



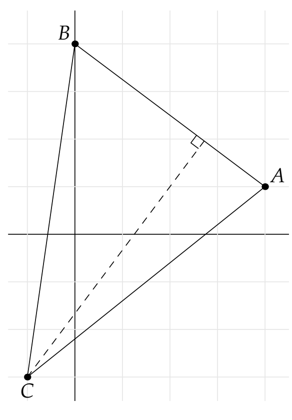
Figuur 15.11: Driehoek ABC met $C(3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$

52. a. Snijpunt van de lijnen vind je uit

$$\begin{cases} 1 + 5\lambda = -2 + 3\mu \\ 12\lambda = 4 - 4\mu \end{cases}$$

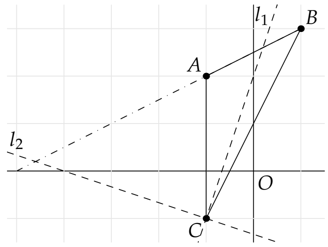
Dit levert $\lambda = 0$ en $\mu = 1$ voor het snijpunt. Invullen in de ene en/of andere vectorvoorstelling levert $S(1,0)$.
Richtingsvector van l is $\binom{5}{12}$, deze heeft lengte $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, dus $\underline{r}_1 = 5\binom{5}{12}$ heeft lengte 65.
Richtingsvector van m is $\binom{3}{-4}$, deze heeft lengte $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, dus $\underline{r}_2 = 13\binom{3}{-4}$ heeft lengte 65.
Richtingsvector van een van de bissectrices is $\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = \binom{25}{60} + \binom{39}{-52} = \binom{64}{8}$
Dus ook $\binom{8}{1}$ is een richtingsvector. Dus een vectorvoorstelling van deze bissectrice is $b_1\colon \binom{x}{y} = \binom{1}{0} + \nu\binom{8}{1}$. De andere bissectrice staat er loodrecht op en gaat ook door $S(1,0)$, dus een vectorvoorstelling is $b_2\colon \binom{x}{y} = \binom{1}{0} + \tau\binom{1}{-8}$.

53. a. Zie figuur 15.12. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \binom{-4}{3}$, dus een normaalvector van AB is $\underline{n} = \binom{3}{4}$. Dus de lijn l_{AB} heeft als normaalvorm $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{b}$, oftewel $3x + 4y = 16$.
Met (4.4) bereken je de afstand van C tot AB:
$d(C, l_{AB}) = \dfrac{|3 \cdot -1 + 4 \cdot -3 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$.
b. De lengte van AB is 5 (zie vorige onderdeel), de oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{5} = 15\frac{1}{2}$
c. Er geldt $BD \parallel AC$, dus de afstand van D tot AC is gelijk aan de afstand van B tot AC.
Analoog aan de methode van onderdeel a vind je:
$l_{AC}\colon 4x - 5y = 11$, en dus $d(B, l_{AC}) = \dfrac{31}{\sqrt{41}}$.



Figuur 15.12: De lengte van de hoogtelijn vanuit C is de afstand van C tot AB

54. Zie figuur 15.13. Een richtingsvector van AB is $\underline{r}_{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stel dat p de richtingscoëfficiënt is van de lijn door C die een hoek van 45° maakt met AB, dan is $\underline{r}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ een richtingsvector.
Met (4.2) volgt: $\cos 45° = \dfrac{|\underline{r}_{AB} \cdot \underline{r}_C|}{|\underline{r}_{AB}|\,|\underline{r}_C|}$, oftewel $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{|2+p|}{\sqrt{5}\sqrt{1+p^2}}$.
Dus $|2+p| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{1+p^2}$. Links en rechts kwadrateren levert:
$(2+p)^2 = \frac{1}{4} \cdot 10(1+p^2)$, oftewel $3p^2 - 8p - 3 = 0$.
Hieruit volgt $p = 3 \vee p = -\frac{1}{3}$. De gevraagde vectorvoorstellingen zijn: $l_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $l_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$



Figuur 15.13: Twee lijnen door C die een hoek van 45° maken met AB

15.5 Uitwerkingen hoofdstuk 5

55. $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, $|\underline{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$ en $|\underline{a}| = \sqrt{3+1+12} = 4$

56. Gegeven is $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. $|\underline{a}| = \sqrt{1 + a_2^2 + 1} = \sqrt{3}$, dus $a_2^2 = 1$, dus $a_2 = \pm 1$.
   b. $|\underline{a}| = \sqrt{a_2^2 + 2} = 3$, dus $a_2^2 + 2 = 9$, dus $a_2 = \pm\sqrt{7}$.
   c. $|\underline{a}| = \sqrt{a_2^2 + 2}$ is minimaal als $a_2 = 0$. Dan is $|\underline{a}| = \sqrt{2}$.

57. $\lambda \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$. Dus $|\lambda \cdot \underline{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} =$ $|\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$.

58. $|\underline{v}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Er moet gelden: $|\alpha\underline{v}| = |\alpha|\,|\underline{v}| = |\alpha| \cdot 3 = 1$. Dus $|\alpha| = \frac{1}{3}$ oftewel $\alpha = \pm\frac{1}{3}$.

59. a. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $|\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{3}$.
   b. Het midden van AB wordt aangewezen door de vector $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1/_2 \\ 1^1/_2 \\ -^1/_2 \end{pmatrix}$.

60. a. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 - 1 + 1 = 2$
   b. $\underline{c} \cdot \underline{d} = -18 - 4 - 2 = -24$
   c. $\underline{e} \cdot \underline{f} = 2 + 2 - 2 = 2$

61. a. $\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$.
   Dus $\angle(\underline{a}, \underline{b}) = 61.8°$.
   b. $\cos \angle(\underline{c}, \underline{d}) = \frac{-24}{\sqrt{14}\sqrt{44}} = \frac{-12}{\sqrt{154}}$. Dus $\angle(\underline{c}, \underline{d}) = 162.2°$.
   c. $\cos \angle(\underline{e}, \underline{f}) = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{9}\sqrt{6}$. Dus $\angle(\underline{e}, \underline{f}) = 74.2°$.

62. $\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \dfrac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Dus $\angle(\underline{a}, \underline{b}) = 48.2°$.

63. Voor de vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ moet gelden: $\underline{a} \cdot \underline{x} = 0$ en $\underline{b} \cdot \underline{x} = 0$. Dus

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Je kunt één variabele vrij kiezen. Neem bijvoorbeeld $x = \lambda$. Dan volgt uit de eerste vergelijking: $y = -3\lambda$. En uit de tweede vergelijking: $z = \lambda$. Dus $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, met $\lambda \in \mathbb{R}$ zijn alle vectoren die loodrecht staan op zowel $\underline{a}$ als $\underline{b}$.

64. a. Uit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ volgt:
$2 = 0 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$
$0 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1$
$3 = 2$. Kan niet, er is geen oplossing, dus A ligt niet op de lijn.
b. Bij elk punt op de lijn hoort een vector van de vorm $\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1-\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus van elk punt op de lijn is de laatste coördinaat gelijk aan 2. Dus ligt B ook niet op de lijn.
c. De laatste coördinaat is twee, en verder volgt uit $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:
$-4 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2$
$3 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = -2$. Dus C ligt op de lijn.

65. Gelijkstellen van de vectorvoorstellingen levert:

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = a - 3 \\ \lambda - \mu = 5 \\ \lambda + \mu = -1 \end{cases}$$

Als je de laatste twee vergelijkingen optelt volgt $\lambda = 2$, en dus $\mu = -3$. Dit invullen in de bovenste Vergelijking levert $a = -1$.

66. Gelijkstellen van de vectorvoorstellingen levert:

$$\begin{cases} \lambda - 3\mu = -1 \\ \lambda - 3\mu = -1 \\ 2\lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$

De eerste twee vergelijkingen zijn identiek. Blijft over een stelsel van twee vergelijkingen met twee variabelen. De determinant van het stelsel, zie paragraaf 2.6, is $1 \cdot -2 - 3 \cdot 2 = -8 \neq 0$, dus is er een oplossing, en dus snijden de lijnen elkaar.
(Overigens is de oplossing $\lambda = \frac{11}{4}$ en $\mu = \frac{5}{4}$).

15.6 *Uitwerkingen hoofdstuk 6*

67. a. Zie figuur 15.14.
b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$. De vectoren zijn onafhankelijk, ze vormen een basis.
c. Het gaat er om waarden voor λ en μ te vinden zodanig dat $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{c}$. Dus $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt:

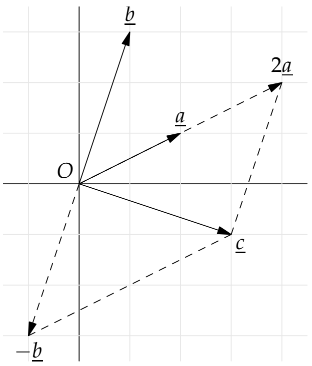
$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{cases}$$

Vegen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Lsh \\ \times -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Dus $\mu = -1$. Dit invullen in de onderste rij levert $\lambda = 2$. Dus $2\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$, oftewel $2\binom{2}{1} - \binom{1}{3} = \binom{3}{-1}$.

d.



Figuur 15.14: De vector $\underline{c}$ kun je schrijven als $2\underline{a} - \underline{b}$

68. a. Voor punt A moet gelden: $\begin{cases} 2 = \lambda + 2\mu \\ 2 = 1 - \lambda + \mu \\ 2 = \lambda - 7\mu \end{cases}$

Als je de eerste twee vergelijkingen bij elkaar optelt, krijg je $\mu = 1$.

Als je de tweede en de derde vergelijking bij elkaar optelt, krijg je $\mu = -\frac{1}{2}$. Dit is strijdig, dus A ligt niet in het vlak.

b. Voor punt B moet gelden: $\begin{cases} 3 = \lambda + 2\mu \\ 1 = 1 - \lambda + \mu \\ 0 = \lambda - 7\mu \end{cases}$

Als je de eerste twee vergelijkingen bij elkaar optelt, krijg je $\mu = 1$. Als je de tweede en de derde vergelijking bij elkaar optelt, krijg je $\mu = 0$. Dit is strijdig, dus B ligt niet in V.

c. Voor punt C moet gelden: $\begin{cases} 2 = \lambda + 2\mu \\ 8 = 1 - \lambda + \mu \\ -4 = \lambda - 7\mu \end{cases}$

Als je de eerste twee vergelijkingen bij elkaar optelt, krijg je $\mu = 3$. Als je de tweede en de derde vergelijking bij elkaar optelt, krijg je $\mu = -\frac{1}{2}$. Dit is strijdig, dus C ligt ook niet in V.

d. Voor punt D moet gelden: $\begin{cases} 2 = \lambda + 2\mu \\ 8 = 1 - \lambda + \mu \\ -25 = \lambda - 7\mu \end{cases}$

Als je de eerste twee vergelijkingen bij elkaar optelt, krijg je $\mu = 3$. Als je de laatste twee vergelijkingen bij elkaar optelt, krijg je ook $\mu = 3$. Hieruit volgt $\lambda = -4$. Deze oplossing voldoet aan alle vergelijkingen, dus D ligt in V.

69. Er zijn (uiteraard) veel verschillende goede oplossingen.

a. Vlak ABC: $\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{c}$ of ook $\underline{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Vlak DEG: dit vlak loopt evenwijdig aan ABC en gaat door D, dus $\underline{x} = \underline{d} + \lambda\underline{a} + \mu\underline{c}$ of ook $\underline{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Vlak BCG: dit vlak loopt evenwijdig aan AOD en gaat door C, dus $\underline{x} = \underline{c} + \lambda\underline{a} + \mu\underline{d}$ of ook $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Vlak DBC: richtingsvectoren zijn bijvoorbeeld $\underline{b} - \underline{c} = \underline{a}$ en $\underline{d} - \underline{c}$. Dus een vectorvoorstelling is $\underline{x} = \underline{d} + \lambda\underline{a} + \mu(\underline{d} - \underline{c})$ of ook $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vlak DFC: richtingsvectoren zijn bijvoorbeeld $\underline{f} - \underline{d} = \underline{b}$ en $\underline{f} - \underline{c} = \underline{e}$. Dus een vectorvoorstelling is $\underline{x} = \underline{d} + \lambda\underline{b} + \mu\underline{e})$ of ook $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. De coördinaten van K gelijkstellen aan de vectorvoorstelling uit het vorige onderdeel levert de oplossing $\lambda = 4$ en $\mu = -2$. Dus ligt $K(2, 4, 2)$ in vlak DFC.

d. Ook $P(-4, 8, -8)$ ligt in vlak DFC: $\lambda = 8$ en $\mu = -12$.

70. a. De vectoren $\underline{r}_1 = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \underline{c} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zijn onafhankelijk, dus hebben ze verschillende richtingen, en liggen A, B en C niet op één lijn.

b. $\underline{r}_1$ en $\underline{r}_2$ zijn richtingsvectoren van het vlak ABC, en $\underline{a}$ is een steunvector. Dus $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{r}_1 + \mu\underline{r}_2$ is een vectorvoorstelling, oftewel $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

71. Gegeven zijn de lijnen $l\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Ze hebben dezelfde steunvector ($\lambda = \mu = 0$).

b. $V\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

72. De steunvector van $\underline{s}$ van l is ook steunvector van V. Verder is $\underline{a} - \underline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van V, en de richtingsvector van l is ook richtingsvector van V.
Hieruit volgt: $V\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

73. a. De richtingsvectoren zijn een veelvoud van elkaar, en hebben dus dezelfde richting. Gelijkstellen van de vectorvoorstellingen levert (onder andere) $\begin{cases} \lambda = 2\mu - 2 \\ \lambda = 2\mu + 1 \end{cases}$
Hieruit volgt $0 = -3$, dit is strijdig, dus is er geen gemeenschappelijk punt.
Alternatief is dat je een punt op een van beide lijnen neemt, bijvoorbeeld $S_l(0, 1, 1)$ en controleert dat dit niet op de andere lijn ligt. De lijnen vallen dus niet samen.

b. Een richtingsvector van V is de richtingsvector van l, en een andere richtingsvector is de vector die tussen de steunpunten S_m en S_l van beide lijnen loopt, dus $\underline{s}_l - \underline{s}_m = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt $V\colon \underline{x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

74. Gelijkstellen van de vectorvoorstellingen levert

$$\begin{cases} 2\lambda - 2\mu - 3\nu = 2 \\ \lambda + 2\nu = 7 \\ \lambda - \mu - \nu = 2 \end{cases}$$

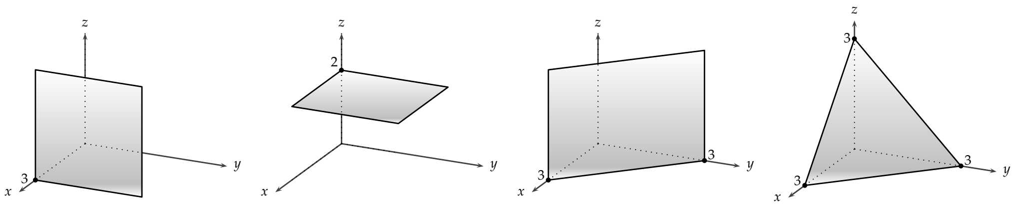
Vegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times -1 \quad \times -2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -7 & -12 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \times -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Uit de bovenste rij volgt: $\nu = 2$. Invullen in de tweede rij levert $\lambda = 3$, invullen in de onderste rij $\mu = -1$. Het snijpunt vind je door $\lambda = 3$ in te vullen in de vectorvoorstelling van l: $S(7, -1, 2)$. Invullen van $\mu = -1$ en $\nu = 2$ in de vectorvoorstelling van V levert hetzelfde punt $S(7, -1, 2)$.

15.7 *Uitwerkingen hoofdstuk 7*

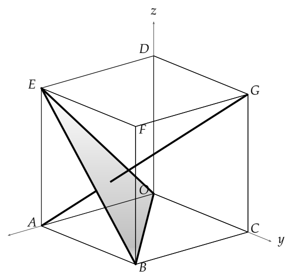
75.



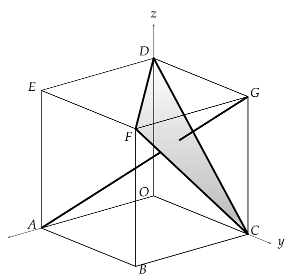
76. $l \perp V$ als de richtingsvector van l loodrecht staat op de richtingsvectoren van V. En inderdaad: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

77. a. $V \perp l$, dus $\underline{n}_V = \underline{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vergelijking van V is $\underline{n}_V \cdot \underline{x} = \underline{n}_V \cdot \underline{a}$ oftewel $x + y - z = -2$.
    b. Richtingsvectoren van V zijn bijvoorbeeld (zie paragraaf 5.4) $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dus een vectorvoorstelling van l is $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

78. a. Zie figuur 15.15. Richtingsvector van AG is $\underline{g} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{r}_{AG}$. Richtingsvectoren van vlak OBE zijn $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\underline{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Er geldt: $\underline{r}_{AG} \cdot \underline{b} = \underline{r}_{AG} \cdot \underline{e} = 0$. Dus is $AG \perp OBE$.
    b. Zie figuur 15.16. $DF \parallel OB$ en $CF \parallel OE$, dus $CDF \parallel OBE$, en dus staat AG ook loodrecht op CDF.



Figuur 15.15: Vlak ACL



Figuur 15.16: Vlak CDF

79. De richtingsvector van de lijn, $\underline{r}_k = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ moet loodrecht staan op de richtingsvectoren van W. Dus

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + 3c = 0 \end{cases}$$

Stel $c = 2\lambda$, dan volgt uit de tweede vergelijking dat $b = 3\lambda$, en daarmee volgt uit de eerste vergelijking dat $a = -3\lambda$. Dus $\lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zijn richtingsvectoren van k. Dus een vectorvoorstelling is k: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn k door het punt $A(5,0,2)$ die loodrecht staat op het vlak W: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

80. De drie punten $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ en $C(0,0,2)$ liggen op de drie assen, dus is $6x + 2y + 3z = 6$ een vergelijking van het vlak, omdat dit door de drie punten gaat. Een normaalvector van ABC is $\underline{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, en dit een richtingsvector van de lijn. Dus een vectorvoorstelling van deze lijn door D is: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

81. a. Elke normaalvector $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ moet loodrecht staan op beide richtingsvectoren:

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

De bovenste vergelijking van de onderste aftrekken levert $c = 0$. Dit invullen in de eerste vergelijking levert $a = -3b$. De normaalvectoren hebben dus de gedaante $\begin{pmatrix} -3b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Verder is $P(1,-1,0)$ een punt van V. Een vergelijking van V is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{p}$, oftewel $-3x + y = -4$

b. Elke normaalvector $\underline{n}_W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ moet loodrecht staan op beide richtingsvectoren:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 0 \\ -2a + 5c = 0 \end{cases}$$

Stel $c = 2\lambda$, met de onderste vergelijking volgt dan $a = 5\lambda$. Invullen in de bovenste vergelijking levert $b = -13\lambda$. Dus $\underline{n}_W = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix}$. Het punt $Q(10,-12,25)$ ligt op W. Een vergelijking van W is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{q}$, oftewel $5x - 13y + 2z = 256$.

82. a. V: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. W: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. S: $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. T: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

83. Uit de vectorvoorstelling volgt $x = -\lambda$, $y = 3 + 2\lambda$ en $z = 1 - \lambda$. Dit invullen in de vergelijking van V levert $\lambda = \frac{3}{2}$. Dit invullen in de vectorvoorstelling levert het snijpunt $S(1\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2})$.

84. *Oplossing 1.*
De vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk stellen levert:

$$\begin{cases} \lambda - \mu - \nu = 3 \\ \phantom{\lambda - {}} \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + \mu \phantom{{}+2\nu} = 3 \end{cases}$$

Vegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Lsh \\ \\ \times -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Lsh \\ \times 2 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Uit de eerste rij volgt $\nu = 0$, met de tweede rij volgt dan $\mu = 0$, invullen in de derde rij levert $\lambda = 3$. Dit invullen in de vectorvoorstelling(en) levert $S(2,3,3)$. Het snijpunt is toevallig ook steunpunt van V.

Oplossing 2.

Stel eerst een vergelijking van V op met behulp van een normaalvector. Voor $\underline{n}_V = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ moet gelden:

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ a - 2b \phantom{{}-c} = 0 \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $a = 2b$, met de eerste volgt $c = b$. Dus $\underline{n} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ is normaalvector. Het punt $P(2,3,3)$ ligt op V, dus een vergelijking van V is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{p}$ oftewel $2x + y + z = 10$. De componenten van de vectorvoorstelling van l invullen in deze vergelijking levert $\lambda = 3$, en dus $S(2,3,3)$ als snijpunt. Dit snijpunt is toevallig ook steunpunt van V.

85. a. De vergelijkingen zijn gelijkwaardig, de vlakken vallen samen.
    b. Voor de snijlijn moet je het volgende stelsel oplossen (zie ook voorbeeld 7.5):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Lsh \\ \times -1 \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times\frac{1}{4} \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 3 \\ \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Stel $z = \lambda$. Uit de eerste rij volgt $x = 1 + \lambda$. Uit de tweede rij volgt $y = 2$. Dus een vectorvoorstelling van de snijlijn is $\underline{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

    c. De snijlijn vind je uit de oplossing van het volgende stelsel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Lsh \\ \times 2 \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times\frac{1}{3} \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Stel $x = \lambda$. Uit de tweede rij volgt dan $y = 1 + 2\lambda$. En uit de eerste rij volgt $z = \frac{7}{3} + \lambda$. Dus een vectorvoorstelling van de snijlijn is $\underline{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/3 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

    d.
    e. De snijlijn vind je uit het oplossen van het volgende stelsel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Lsh \\ \times -3 \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Stel $y = \lambda$, dan volgt uit de eerste rij: $x = 2 + 2\lambda$. De tweede rij zegt dat $z = 1$. Dus een vectorvoorstelling van de snijlijn is $\underline{x} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

86. a. Vul de componenten van de vectorvoorstelling van W ($x = \lambda$, $y = \mu$ en $z = 1$) in de vergelijking van V in: $\lambda + \mu + 1 = 2$, dus $\mu = 1 - \lambda$. Uit

$$\begin{cases} x = \phantom{1 -{}} \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

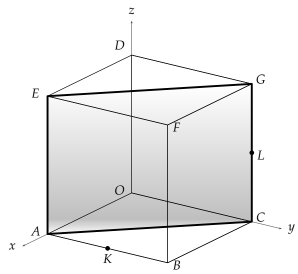
volgt de vectorvoorstelling van de snijlijn: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Idee voor de oplossing: maak van een van beide vectorvoorstelling een vergelijking, en vul de componenten van de andere vectorvoorstelling in de gemaakte vergelijking in.
Maak voor V een vergelijking. $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de richtingsvectoren van V:

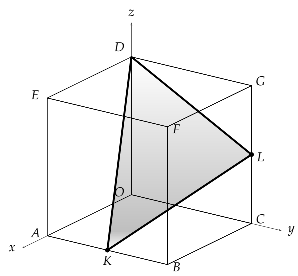
$$\begin{cases} a + b \quad\;\; = 0 \\ \quad\;\; b - c = 0 \end{cases}$$

Stel $c = \lambda$, dan is $b = \lambda$ en $a = -\lambda$, dus $\underline{n} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vergelijking van V is $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ oftewel $-x + y + z = 1$.
Hierin de componenten van de vectorvoorstelling van W invullen: $-(\gamma + 2\delta) + \delta + (\gamma - \delta) = 1$, dus $\delta = -\frac{1}{2}$. Dit invullen in de vectorvoorstelling van W levert een vectorvoorstelling van de snijlijn: $\underline{x} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

87. a. Zie figuur 15.17 en 15.18. Normaalvector van ACL is $\underline{n}_{ACL} = \underline{b}$, vergelijking van ACL is $\underline{n}_{ACL} \cdot \underline{x} = \underline{n}_{ACL} \cdot \underline{a}$, oftewel $x + y = 10$.
Uit $\underline{n}_{DKL} \cdot (\underline{k} - \underline{d}) = 0$ en $\underline{n}_{DKL} \cdot (\underline{l} - \underline{d}) = 0$ volgt $\underline{n}_{DKL} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Vergelijking van DKL is $3x + 2y + 4z = 40$.



Figuur 15.17: Vlak ACL



Figuur 15.18: Vlak DKL

b. De coëfficiëntenmatrix van de vergelijkingen is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 40 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times -3 \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Stel $z = \lambda$, dan volgt uit de tweede rij dat $y = 4\lambda - 10$ en uit de eerste rij $x = -4\lambda + 20$. Dus een vectorvoorstelling van de snijlijn is $\underline{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

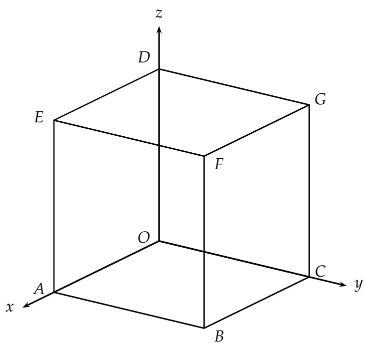
88. Vergelijkingen van de vlakken zijn $V\colon 2x + y + z = 2$ en $W\colon 2x + y + z = 1$. De normaalvectoren van beide vlakken zijn gelijk, en dus is $V \parallel W$, maar de vergelijkingen zijn verschillend, dus vallen de vlakken niet samen.

89. Een vergelijking van zowel V als W is $3x - y + z = 4$. Dus V en W vallen samen.

90. *Oplossing 1.*
De richtingsvectoren van het vlak zijn $\underline{r}_{1V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_{2V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
De richtingsvector van l kun je schrijven als lineaire combinatie van de richtingsvectoren van V, er geldt: $\underline{r}_l = \underline{r}_{1V} - \underline{r}_{2V}$, dus heeft l dezelfde richting als een vector die in V ligt. Het steunpunt $S(0, 0, 1)$ van l ligt niet in V, dus valt l niet samen met V.
Oplossing 2.
Een normaalvector van V is $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Deze staat loodrecht op de richtingsvector van l. Dus is $l \parallel V$. Het steunpunt $S(0, 0, 1)$ van l voldoet niet aan de vectorvoorstelling van V en ligt dus niet in V, dus valt l niet samen met V.

91. *Oplossing 1.*
Er geldt: $\underline{r}_{1V} - \underline{r}_{2V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{r}_l$. Dus de richting van l komt overeen met een vector in V. Het steunpunt $S(-3, 2, 1)$ van l ligt in V ($\mu = \nu = -1$), dus ligt l in zijn geheel in V.
Oplossing 2.
Een normaalvector van V is $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Deze staat loodrecht op de richtingsvector van l. Dus is $l \parallel V$. Het steunpunt $S(-3, 2, 1)$ van l ligt in V ($\mu = \nu = -1$), dus ligt l in zijn geheel in V.

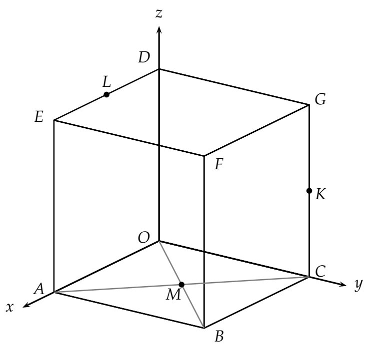
15.8 Uitwerkingen hoofdstuk 8



Figuur 15.19: Kubus *OABC.DEFG*

92. Zie figuur 15.19.
 a. Een richtingsvector van AE is $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, een richtingsvector van FC is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Met formule (8.1) volgt: $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\phi = 45°$.
 b. $\underline{r}_{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, met (8.1) volgt $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, dus $\phi = 60°$.
 c. $\underline{r}_{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus de richtingsvectoren zijn een veelvoud van elkaar, dus lopen de lijnen evenwijdig, en is de hoek tussen de lijnen 0°

93. a. Met formule (8.1) volgt: $\cos\angle(l, m) = \frac{|-8|}{\sqrt{9}\sqrt{13}} = \frac{8}{3\sqrt{13}}$, dus $\angle(l, m) = 42.3°$.
 b. Met formule (8.1) volgt: $\cos\angle(l, m) = \frac{10}{\sqrt{25}\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, dus $\angle(l, m) = 48.2°$.



Figuur 15.20: Kubus *OABC.DEFG* met *K*, *L* en *M*

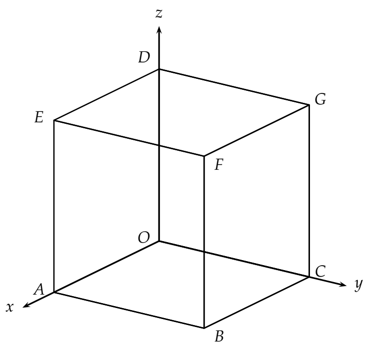
94. Zie figuur 15.20.
 a. $\overrightarrow{EM} = \underline{m} - \underline{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AG} = \underline{g} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Het inproduct van deze vectoren is 0, dus de lijnen staan loodrecht op elkaar, $\angle(EM, AG) = 90°$.
 b. $\overrightarrow{AK} = \underline{k} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BL} = \underline{l} - \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Het inproduct van deze vectoren is 0, dus $\angle(AK, BL) = 90°$
 c. Een richtingsvector van AG is $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zie onderdeel a.) Een richtingsvector van BL is $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (zie onderdeel b.) Dus uit (8.1) volgt $\cos\angle(AG, BL) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$, dus $\angle(AG, BL) = 78.9°$.
 d. $\overrightarrow{DK} = \underline{k} - \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus $\underline{r}_{DK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Verder is $\underline{r}_{BL} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, zie onderdeel b. Uit (8.1) volgt $\angle(DK, BL) = \dfrac{6}{\sqrt{5}\sqrt{9}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. Dus $\angle(DK, BL) = 26.6°$.

95. a. Richtingsvectoren van OBE zijn $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Een

normaalvector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ van OBE moet voldoen aan:

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ x + y \quad = 0 \end{cases}$$

Stel $z = 1$, dan is $x = -1$ en $y = 1$, dus $\underline{n}_{OBE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
OAB is het grondvlak, dus $\underline{n}_{OAB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Met (8.2) volgt:
$\cos\angle(OBE, OAB) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus $\angle(OBE, OAB) = 54.7°$.



Figuur 15.21: Kubus $OABC.DEFG$

b. $\underline{n}_{OBE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zie vorige onderdeel). Richtingsvectoren van OBG zijn $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Een normaalvector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ van OBE moet voldoen aan:

$$\begin{cases} x + y \quad = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

Stel $x = 1$, dan is $y = -1$ en $z = 1$, dus $\underline{n}_{OBG} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Met (8.2) volgt: $\cos\angle(OBE, OBG) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, dus $\angle(OBE, OBG) = 70.5°$.

96. a. $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{n}_W = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Met (8.2) volgt: $\cos\angle(V, W) = \dfrac{5}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$. Dus $\angle(V, W) = 49.8°$.
b. $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\underline{n}_W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Er geldt: $\underline{n}_V \cdot \underline{n}_W = 0$, dus $\angle(V, W) = 90°$.

97. $V \perp W$ als $\underline{n}_V \cdot \underline{n}_W = 0$, dus als $2 - 3 - a = 0$, oftewel als $a = -1$.

98. a. Bereken eerst de hoek tussen $\underline{r}_l$ en $\underline{n}_V$, zie (8.3):
$\cos\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = \dfrac{4}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{4}{9}$. Hieruit volgt $\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = 63.6°$, en dus $\angle(V, l) = 90° - 63.6° = 26.4°$.
b. $\underline{n}_V$ moet loodrecht staan op beide richtingsvectoren van V, dus

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud daarvan). Uit (8.3) volgt: $\cos\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus $\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = 45°$, en dus is ook $\angle(V, l) = 45°$.
c. $\underline{r}_l = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Uit (8.3) volgt:
$\cos\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = \dfrac{23}{\sqrt{33}\sqrt{21}} = \dfrac{23}{3\sqrt{77}} = \frac{23}{231}\sqrt{77}$. Dus $\angle(\underline{r}_l, \underline{n}_V) = 29.1°$, en dus is $\angle(V, l) = 90° - 29.1° = 60.9°$.

99. De hoek tussen l en V is $30°$ als de hoek tussen l en de normaal van V gelijk is aan $60°$. Wegens $\cos 60° = \frac{1}{2}$ moet dan gelden:
$\dfrac{|3k|}{\sqrt{11}\sqrt{k^2+2}} = \frac{1}{2}$.

Links en rechts kwadrateren levert: $9k^2 = \frac{11}{4}(k^2+2)$, oftewel $36k^2 = 11k^2 + 22$, dus $k^2 = \frac{22}{25}$. Dus de hoek tussen l en V is 30° voor $k = \pm\frac{1}{5}\sqrt{22}$.

100. a. Volgens (8.5) is $d(A,V) = \dfrac{|3\cdot -1 - 4\cdot 3 + 0 - 10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$.

b. $\underline{n}_V$ staat loodrecht op beide richtingsvectoren van V, dus

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ \quad\ \ 2y - \ \ z = 0 \end{cases}$$

Stel $z = 2$, dan volgt $y = 1$ en $x = -2$. Dus $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Een vergelijking van V is $\underline{n}\cdot\underline{x} = \underline{n}\cdot\underline{a}$, oftewel $-2x + y + 2z = -6$. Met (8.5) volgt $d(A,V) = \dfrac{|0 + 1\cdot -4 + 2\cdot -4 + 6|}{\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3} = 2$.

101. P ligt op l, dus de coördinaten van P zijn $p_1 = \lambda$, $p_2 = 8 + 2\lambda$ en $p_3 = -1 - \lambda$. Verder is $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Voor de afstand van P tot V geldt, zie (8.5):
$\dfrac{|1\cdot\lambda + 1\cdot(8+2\lambda) + 2\cdot(-1-\lambda) - 1|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$. Dus $|\lambda + 4| = 12$, oftewel $\lambda + 4 = 12 \vee \lambda + 4 = -12$, dat wil zeggen: $\lambda = 8 \vee \lambda = -16$. Invullen in de vectorvoorstelling van l levert: $P_1(8,24,-9)$ of $P_2(-16,-24,15)$.

102. a. $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Er geldt $\underline{n}_V \cdot \underline{r}_l = 0$, dus staat de normaal van V loodrecht op l, dat wil zeggen dat V en l evenwijdig zijn.

b. Een punt van l is $P(1,2,1)$.
En $d(l,V) = d(P,V) = \dfrac{|2+8+6-7|}{\sqrt{56}} = \dfrac{9}{\sqrt{56}} = \frac{9}{28}\sqrt{14}$.

103. a. $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\underline{n}_W = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Deze zijn een veelvoud van elkaar, dus zijn de vlakken evenwijdig. Een punt van V is $P(3,0,0)$, er geldt: $d(V,W) = d(P,W) = \dfrac{|3\cdot -1 - 5|}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$.

b. $\underline{n}_V$ staat loodrecht op beide richtingsvectoren van V, dus moet gelden:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

Stel $x = 1$, dan volgt $z = -1$ en $y = -2$.
Dus $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{n}_W$, dus is $V \parallel W$. Het punt $P(2,-1,1)$ is een punt van V, er geldt: $d(V,W) = d(P,W) = \dfrac{|2+2-1-4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

c. $\underline{n}_V$ staat loodrecht op beide richtingsvectoren van V, dus moet gelden:

$$\begin{cases} \qquad\ \ 3y + z = 0 \\ 2x + \ \ y - z = 0 \end{cases}$$

Stel $z = 3$, dan volgt $y = -1$ en $x = 2$. Dus $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, en deze vector staat ook loodrecht op beide richtingsvectoren $\underline{r}_{W1}$ en $\underline{r}_{W1}$ van W, wegens $\underline{n}_V \cdot \underline{r}_{W1} = 0$ en $\underline{n}_V \cdot \underline{r}_{W2} = 0$. Dus zijn de vlakken evenwijdig. V gaat door $S(1, -4, 0)$, dus een vergelijking van V is $\underline{n}_V \cdot \underline{x} = \underline{n}_V \cdot \underline{s}$, oftewel $2x - y + 3z = 6$. Een punt op W is $P(1, 1, -2)$, en er geldt:
$d(W, V) = d(P, V) = \dfrac{|2 - 1 - 6 - 6|}{\sqrt{14}} = \dfrac{11}{\sqrt{14}} = \frac{1}{14}\sqrt{14}$.

104. Maak een vlak V door $P(-2, 1, 5)$ loodrecht op l. Dus $\underline{n}_V = \underline{r}_l = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Een vergelijking van V is $\underline{n}_V \cdot \underline{x} = \underline{n}_V \cdot \underline{p}$, oftewel $-x + 3z = 17$. Het snijpunt S vind je door de componenten van de vectorvoorstelling van l in te vullen in de vergelijking van V, dit levert $\lambda - 3 + 9\lambda = 17$, dus $\lambda = 2$. Dit invullen in de vectorvoorstelling van l levert $S(-2, 1, 5)$. Dit is hetzelfde punt als P. Dus P ligt op l, dus $d(P, l) = 0$.

105. Maak een vlak V door $A(0, 3, 0)$ loodrecht op l. Dus $\underline{n}_V = \underline{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Een vergelijking van V is $\underline{n}_V \cdot \underline{x} = \underline{n}_V \cdot \underline{p}$, oftewel $x + 6y + z = 18$. Het snijpunt S vind je door de componenten van de vectorvoorstelling van l in te vullen in de vergelijking van V, dit levert $\lambda + 36\lambda + \lambda = 18$, dus $\lambda = \frac{9}{19}$. Dit invullen in de vectorvoorstelling van l levert $S(\frac{9}{19}, \frac{54}{19}, \frac{9}{19})$. Dus $\overrightarrow{AS} = \underline{s} - \underline{a} = \frac{3}{19}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. De gevraagde afstand is $AS = \frac{3}{19}\sqrt{9 + 1 + 9} = \frac{3}{19}\sqrt{19}$.

106. a. De idee is een vergelijking van h_A op te stellen, een vectorvoorstelling van de lijn l door BC, en dan van h_A en l het snijpunt D te bepalen. Er geldt $h_A \perp BC$, dus $\underline{n}_{h_A} = \underline{c} - \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
h_A gaat door A, dus een vergelijking van h_A is $-3x + 2z = 15$.
Een vectorvoorstelling van de lijn l door BC is $l\colon \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
De componenten van l invullen in de vergelijking van h_A levert: $-3(3 - 3\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) = 15$, oftewel $\lambda = 2$.
Deze waarde invullen in de vectorvoorstelling van l levert: $D(-3, 1, 3)$.
Nu geldt: $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $AD = 1$.

b. De oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte, oftewel $\frac{1}{2} \times BC \times AD$. De lengte van AD is in het vorige onderdeel uitgerekend, en voor BC geldt: $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus $BC = \sqrt{13}$. De gevraagde oppervlakte is $\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

107. a. Een punt P op l heeft plaatsvector $\underline{p} = \begin{pmatrix} -1+2\lambda \\ -2+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Een punt S op m heeft plaatsvector $\underline{s} = \begin{pmatrix} 4+2\mu \\ 2 \\ -3-\mu \end{pmatrix}$.
Dus $\underline{s} - \underline{p} = \begin{pmatrix} 5+2\mu-2\lambda \\ 4-2\lambda \\ -3-\mu-\lambda \end{pmatrix}$.
Deze vector moet loodrecht staan op de richtingsvector van l, dus $2(5 + 2\mu - 2\lambda) + 2(4 - 2\lambda) + (-3 - \mu - \lambda) = 0$, oftewel $9\lambda - 3\mu = 15$
De vector $\underline{s} - \underline{p}$ moet ook loodrecht staan op de richtingsvector

van m, dus $2(5+2\mu-2\lambda)-(-3-\mu-\lambda) = 0$, oftewel $-3\lambda+5\mu=-13$

Het gaat dus om het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} 9\lambda - 3\mu = 15 \\ -3\lambda + 5\mu = -13 \end{cases}$$

Hieruit volgt $\mu=-2$ en $\lambda=1$. Invullen in de vectorvoorstellingen levert $P(1,0,1)$ en $S(0,2,-1)$. $\overrightarrow{PS} = \underline{s} - \underline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus $PS = \sqrt{1+4+4} = 3$.

b. Maak een vlak V door m evenwijdig aan l. Dat wil zeggen dat de normaal van V loodrecht staat op de richtingsvector van zowel l als van m. Dus $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. V gaat door het punt $Q(2,5,3)$ van m. Dus een vergelijking van V is $-3x+4y=14$. $P(1,-2,-1)$ is een punt van l. Er geldt:
$d(l,m) = d(P,V) = \dfrac{|-3\cdot 1 + 4\cdot -2 - 14|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{25}{\sqrt{25}} = 5$

108. a. AE is het lijnstuk dat loodrechte staat op beide kruisende lijnen AB en ED, dus $d(AB,ED) = AE = 4$

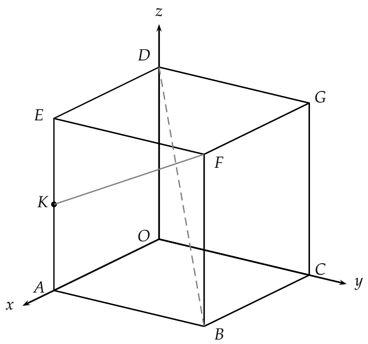
b. Als onderdeel a: $d(AB,EG) = AE = 4$

c. Zie figuur 15.22. Een vectorvoorstelling van FK is $\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

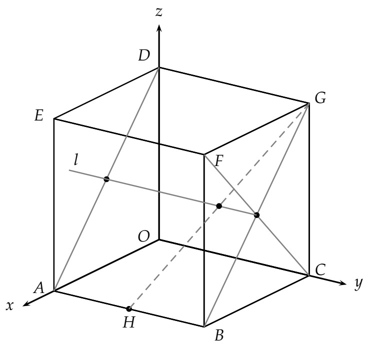
Een vectorvoorstelling van BD is $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Het vlak V door BD evenwijdig aan FK heeft normaalvector $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Een vergelijking van V is $3x-y+2z=8$. Het punt $K(4,0,2)$ ligt op FK. Er geldt:
$d(FK,BD) = d(K,V) = \dfrac{|3\cdot 4 + 2\cdot 2 - 8|}{\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}$

d. Zie figuur 15.23. Lijn l gaat door de middens van AD en FC, en ligt in het vlak $ABGD$. De lijn HG ligt ook in vlak $ABGD$. Dus l en HG snijden elkaar, dus $d(l,HG) = 0$.



Figuur 15.22: Kubus $OABC.DEFG$



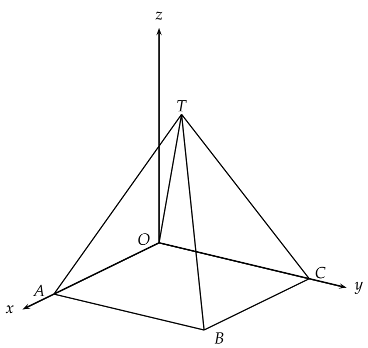
Figuur 15.23: Lijn HG ligt in vlak $ABGD$

109. a. Zie figuur 15.24.

Er geldt: AT: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en BC: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Maak vlak V door AT en evenwijdig aan BC (dus $V = OAT$). Dan is $\underline{n}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, en een vergelijking van V is $-2y+z=0$. $C(0,2,0)$ ligt op BC, dus
$d(AT,BC) = d(V,C) = \dfrac{|-2\cdot 2|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

b. De in het vorige onderdeel berekende afstand is de kleinste hoogte die driehoek PBC kan hebben. De kleinste oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \times BC \times \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

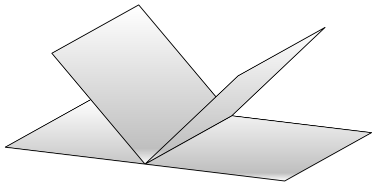


Figuur 15.24: Piramide $T.OABC$

110. a. Elk van de vergelijkingen stelt een vlak voor. De drie vlakken hebben één gemeenschappelijk punt. De oplossing $(0,0,1)$ is het snijpunt van deze drie vlakken.

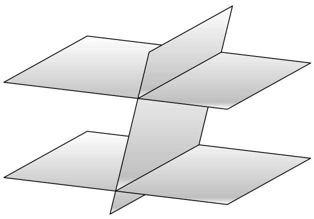
b. Ook hier stelt elk van de vergelijkingen een vlak voor. De oplossing is een lijn: de gemeenschappelijke lijn waar de drie vlakken doorheen gaan.

111. a. 1. Eén gemeenschappelijk punt: bijvoorbeeld het xy-, xz- en yz-vlak die de oorsprong als gemeenschappelijk punt hebben. Of de hoek van een kamer waar twee muren en de vloer bij elkaar komen.
2. Geen gemeenschappelijk punt: bijvoorbeeld drie evenwijdige vlakken waarvan er niet twee of drie samenvallen.
3. Oneindig veel punten gemeenschappelijk: bijvoorbeeld drie vlakken door één lijn (vlakkenwaaier), zoals de bladzijden van een tijdschrift die de vouwlijn met het nietje gemeenschappelijk hebben, zie figuur 15.25.
Of drie evenwijdige vlakken waarvan er twee of drie samenvallen.



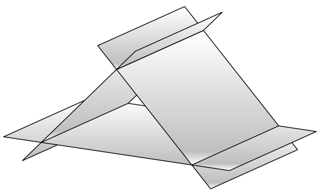
Figuur 15.25: Een waaier van vlakken met een gemeenschappelijke snijlijn

b. 1. De eerste mogelijkheid bestaat uit drie evenwijdige vlakken waarvan er niet twee of drie samenvallen.
2. De tweede mogelijkheid zijn twee evenwijdige niet samenvallende vlakken die gesneden worden door een derde vlak, zoals in figuur 15.26, er zijn dan twee evenwijdige snijlijnen.



Figuur 15.26: Twee evenwijdige vlakken, gesneden door een derde vlak

3. De derde mogelijkheid zie je in figuur 15.27.



Figuur 15.27: Drie niet evenwijdige vlakken met drie evenwijdige snijlijnen

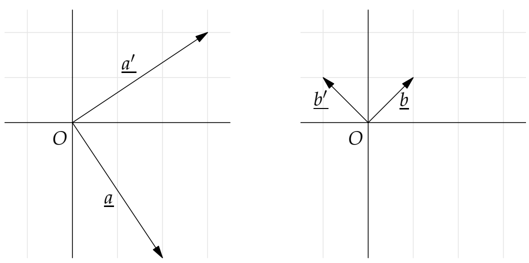
15.9 *Uitwerkingen hoofdstuk 9*

112. a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot2+4\cdot3 \\ 2\cdot1-1\cdot2+0\cdot3 \\ 5\cdot1-2\cdot2-3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

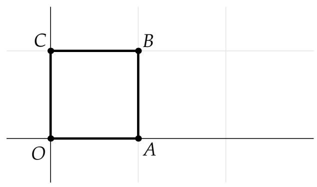
c. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

113. De afbeelding is een rotatie om O over een hoek van 90 graden.



(a) $\underline{a}$ en $\underline{a}' = M \cdot \underline{a}$ (b) $\underline{b}$ en $\underline{b}' = M \cdot \underline{b}$

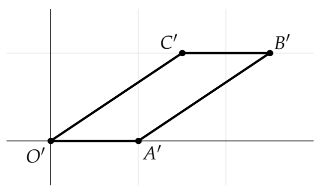
114. a.



Figuur 15.28: Vierkant $OABC$

b. $O' = M\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$, $A' = M\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$, $B' = M\binom{1}{1} = \binom{5/2}{1}$ en $C' = M\binom{0}{1} = \binom{3/2}{1}$.

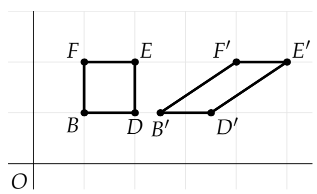
c.



Figuur 15.29: Vierkant $O'A'B'C'$

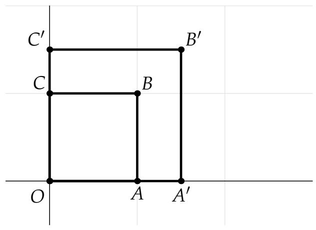
d. Toepassen van M trekt het vierkant scheef tot een parallellogram.

e. Zie figuur 15.30



Figuur 15.30: Vierkant $BDEF$ en het beeld daarvan

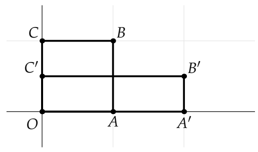
115. a. $M\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$, $M\binom{1}{0} = \binom{3/2}{0}$, $M\binom{1}{1} = \binom{3/2}{3/2}$ en $M\binom{0}{1} = \binom{0}{3/2}$.



Figuur 15.31: Vierkant $OABC$ en het beeld dat anderhalf keer zo groot is

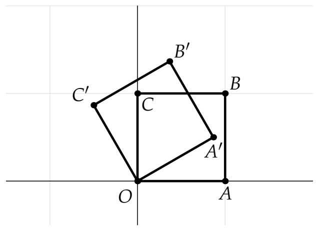
b. Zie figuur 15.31
c. Zie het bijschrift van figuur 15.31

116. a. $M\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}$ en $M\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$.
b. Zie figuur 15.32
c. Zie het bijschrift van figuur 15.32



Figuur 15.32: Vierkant $OABC$ wordt twee keer zo breed en half zo hoog

117. a. $M\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $M\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ en $M\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
b. Zie figuur 15.33



Figuur 15.33: Rotatie om O over $\frac{\pi}{6}$ radialen (30 graden)

c. Zie het bijschrift bij figuur 15.33

15.10 Uitwerkingen hoofdstuk 10

118. Bijvoorbeeld: $\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1a+0b+0c\\ 1d+0e+0f\\ 1g+0h+0k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}$.

119. Je moet controleren of voor alle x, y en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:
   1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
   Voor $f(x) = 2x+1$ geldt enerzijds:
   $f(x+y) = 2(x+y)+1 = 2x+2y+1$, en anderzijds:
   $f(x)+f(y) = 2x+1+2y+1 = 2x+2y+2$
   Dit is niet gelijk aan elkaar.
   2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
   Voor $f(x) = 2x+1$ geldt enerzijds:
   $f(\lambda x) = 2(\lambda x)+1 = 2\lambda x+1$, en anderzijds:
   $\lambda f(x) = \lambda(2x+1) = 2\lambda x+\lambda$. En dit is ongelijk voor alle $\lambda \neq 1$.

   De functie voldoet dus aan geen van beide voorwaarden, en is dus geen lineaire afbeelding in de betekenis van definitie 10.1.

120. Eigenschap 1:

$$\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{smallmatrix}\right)\left[\left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)\right] = \left(\begin{smallmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}12\\14\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}56\\58\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}66\\68\end{smallmatrix}\right)$$

en

$$\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}28\\29\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}38\\39\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}66\\68\end{smallmatrix}\right)$$

Klopt.
Eigenschap 2:

$$\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}\right)\left[2\left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right)\right]=\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}10\\12\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}56\\58\end{smallmatrix}\right)$$

en

$$2\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right)=2\left(\begin{smallmatrix}28\\29\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}56\\58\end{smallmatrix}\right)$$

Klopt.

121. Eigenschap 1:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+ay_1\ +\ bx_2+by_2\\cx_1+cy_1\ +\ dx_2+dy_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\ +\ ay_1+by_2\\cx_1+dx_2\ +\ cy_1+dy_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Klopt.
Eigenschap 2:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left[\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\lambda x_1+b\lambda x_2\\c\lambda x_1+d\lambda x_2\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Klopt.

122. Als de lijn door de oorsprong gaat, dus als $b=0$.

123. a. $A\left(\begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix}\right)=A\left[2\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\right]=2A\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)=2\left(\begin{smallmatrix}6\\9\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}12\\18\end{smallmatrix}\right)$
b. $\begin{pmatrix}3\\4\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
c. $A\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right)=A\left[\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right]=A\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)+A\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}6\\9\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}10\\12\end{smallmatrix}\right)$

124. Stel $\underline{u}=\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)$ en $\underline{v}=\left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\end{smallmatrix}\right)$ en $\lambda\in\mathbb{R}$.
a. Voor projectie op de x_2-as geldt: $f(\underline{u})=\left(\begin{smallmatrix}0\\u_2\end{smallmatrix}\right)$ en $f(\underline{v})=\left(\begin{smallmatrix}0\\v_2\end{smallmatrix}\right)$.
Verder geldt:

$$f(\underline{u}+\underline{v})=f\left[\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\end{smallmatrix}\right)\right]=f\left(\begin{smallmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{smallmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}0\\u_2+v_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\u_2\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}0\\v_2\end{smallmatrix}\right)=f\left(\underline{u}\right)+f\left(\underline{v}\right)$$

en $f\left(\lambda\underline{u}\right)=f\left[\lambda\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)\right]=f\left(\begin{smallmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\\lambda u_2\end{smallmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{smallmatrix}0\\u_2\end{smallmatrix}\right)=\lambda f(\underline{u})$.
De projectie op de x_2-as voldoet aan beide voorwaarden, en is dus een lineaire afbeelding.
b. Voor spiegeling in de x_1-as geldt: $f(\underline{u})=\left(\begin{smallmatrix}u_1\\-u_2\end{smallmatrix}\right)$ en $f(\underline{v})=\left(\begin{smallmatrix}v_1\\-v_2\end{smallmatrix}\right)$.
Verder geldt:

$$f(\underline{u}+\underline{v})=f\left[\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\end{smallmatrix}\right)\right]=f\left(\begin{smallmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{smallmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}u_1+v_1\\-(u_2+v_2)\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}u_1\\-u_2\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}v_1\\-v_2\end{smallmatrix}\right)=f\left(\underline{u}\right)+f\left(\underline{v}\right)$$

en $f\left(\lambda\underline{u}\right)=f\left[\lambda\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)\right]=f\left(\begin{smallmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\lambda u_1\\-\lambda u_2\end{smallmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{smallmatrix}u_1\\-u_2\end{smallmatrix}\right)=\lambda f(\underline{u})$.
De spiegeling in de x_1-as voldoet aan beide voorwaarden, en is dus een lineaire afbeelding.

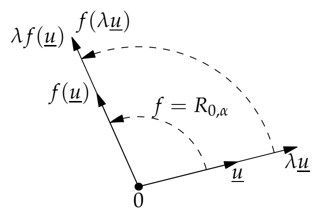
c. Bij spiegeling in de lijn $y = 2$ wordt de oorsprong afgebeeld op $(0, 4)$, en dit kan dus geen lineaire afbeelding zijn.

d. Voor spiegeling in O geldt: $f(\underline{u}) = \binom{-u_1}{-u_2}$ en $f(\underline{v}) = \binom{-v_1}{-v_2}$.
Verder geldt:

$$\begin{aligned} f(\underline{u} + \underline{v}) &= f\left[\binom{u_1}{u_2} + \binom{v_1}{v_2}\right] = f\binom{u_1+v_1}{u_2+v_2} \\ &= \binom{-(u_1+v_1)}{-(u_2+v_2)} = \binom{-u_1}{-u_2} + \binom{-v_1}{-v_2} = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \end{aligned}$$

en $f(\lambda\underline{u}) = f\left[\lambda\binom{u_1}{u_2}\right] = f\binom{\lambda u_1}{\lambda u_2} = \binom{-\lambda u_1}{-\lambda u_2} = \lambda\binom{-u_1}{-u_2} = \lambda f(\underline{u})$.
De spiegeling in O voldoet aan beide voorwaarden, en is dus een lineaire afbeelding.

125.



Figuur 15.34: Rotatie om O over hoek α

126.

$$\begin{array}{ccc} \underline{u} & \xrightarrow{\text{roteren}} & f(\underline{u}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{scalaire verm.}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\text{scalaire verm.}} \\ \lambda\underline{u} & \xrightarrow[\text{roteren}]{} & \lambda f(\underline{u}) = f(\lambda\underline{u}) \end{array}$$

Figuur 15.35: Je kunt de volgorde tussen scalaire vermenigvuldiging en roteren verwisselen

127. Functies van de vorm $f(x) = ax$, met $a \in \mathbb{R}$ zijn lineair volgens de definitie uit de lineaire algebra.

128.

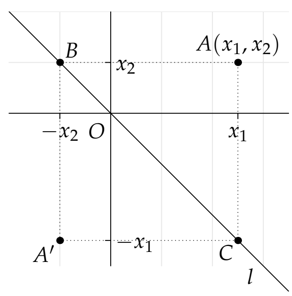
a. $\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1' &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$

129. a. Zie figuur 15.36.
$\begin{cases} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$

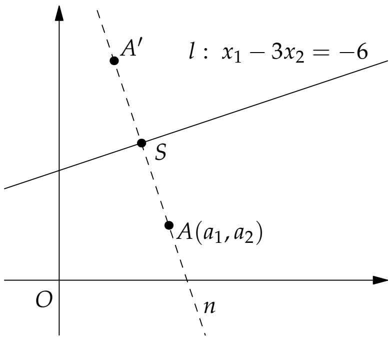
b. $\begin{cases} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1' &= kx_1 \\ x_2' &= kx_2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= 3x_2 \end{cases}$



Figuur 15.36: Spiegeling van $A(x_1, x_2)$ in de lijn l: $x_1 = -x_2$

130. Neem een willekeurig punt $A(a_1, a_2)$, zie figuur 15.37. Een normaalvector van l is $\binom{1}{-3}$, dus een vectorvoorstelling van de lijn n door A loodrecht op l is:



Figuur 15.37: Spiegeling van $A(a_1, a_2)$ in lijn l

$$n: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bepaal nu de waarde λ_S die hoort bij het snijpunt $S(l, n)$:
$x = a_1 + \lambda_S$ en $x_2 = a_2 - 3\lambda_S$ invullen in $l : x_1 - 3x_2 = -6$ levert:

$$\begin{aligned} a_1 + \lambda_S - 3(a_2 - 3\lambda_S) &= -6 \\ 10\lambda_S &= -6 - a_1 + 3a_2 \\ \lambda_S &= \frac{-6 - a_1 + 3a_2}{10} \end{aligned}$$

Het beeld A' ligt op n, en de waarde van λ die bij A' hoort, is $2\lambda_S$. De vector die bij A' hoort, is $\underline{a}' = \underline{a} + 2\lambda_S \cdot \underline{n}$. Als je hierin de waarde van λ_S invult, krijg je:

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 + \frac{-6 - a_1 + 3a_2}{5} \cdot 1 \\ a_2' &= a_2 + \frac{-6 - a_1 + 3a_2}{5} \cdot -3 \end{aligned}$$

Uitwerken levert:

$$\begin{aligned} a_1' &= \tfrac{4}{5}a_1 + \tfrac{3}{5}a_2 - \tfrac{6}{5} \\ a_2' &= \tfrac{3}{5}a_1 - \tfrac{4}{5}a_2 + \tfrac{18}{5} \end{aligned}$$

Omdat ik begonnen ben met een willekeurig punt $A(a_1, a_2)$, mag je de coördinaten a_1 en a_2 ook vervangen door het meer algemene x_1 en x_2, dus:

$$\begin{cases} x_1' &= \tfrac{4}{5}x_1 + \tfrac{3}{5}x_2 - \tfrac{6}{5} \\ x_2' &= \tfrac{3}{5}x_1 - \tfrac{4}{5}x_2 + \tfrac{18}{5} \end{cases}$$

131. De afbeelding uit opgave 130 is niet lineair, omdat de oorsprong niet op zichzelf wordt afgebeeld. De overige afbeeldingen zijn wel lineair, je kunt ze met behulp van een matrix schrijven.

132.

a. $\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= x_3 \end{cases}$

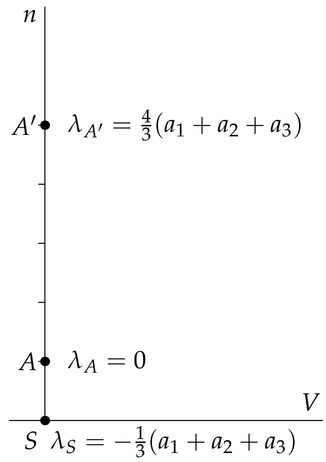
c. $\begin{cases} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= x_3 \end{cases}$

133. Noem het vlak V. Neem een willekeurig punt $A(a_1, a_2, a_3)$. Een normaalvector van V is $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dus een vectorvoorstelling van de lijn n door A loodrecht op V is: $n\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Uit deze vectorvoorstelling is duidelijk dat $\lambda = 0$ de waarde van λ is die bij A hoort.
Welke λ hoort bij het snijpunt S van n met V? Voor S geldt: $(a_1+\lambda)+(a_2+\lambda)+(a_3+\lambda) = 0$, dus $\lambda_S = -\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$.
Het beeld A' van A ligt vijf keer zo ver van S als A, ofwel $\overrightarrow{SA'} = 5\overrightarrow{SA}$. Dus $\lambda_{A'} = -4\lambda_S = \frac{4}{3}(a_1+a_2+a_3)$. Deze waarde invullen in de vectorvoorstelling van n levert de coördinaten van A':

$$\begin{cases} a_1' &= \frac{7}{3}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 \\ a_2' &= \frac{4}{3}a_1 + \frac{7}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 \\ a_3' &= \frac{4}{3}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{7}{3}a_3 \end{cases}$$

Dus de afbeeldingsvergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} x_1' &= \frac{7}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_2' &= \frac{4}{3}x_1 + \frac{7}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_3' &= \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \end{cases}$$



Figuur 15.38: Vermenigvuldiging met factor 5 ten opzichte van V

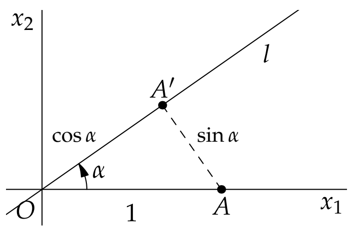
15.11 Uitwerkingen hoofdstuk 11

134. a. $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

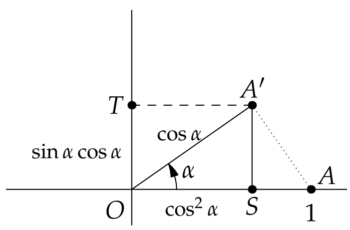
b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$

135.



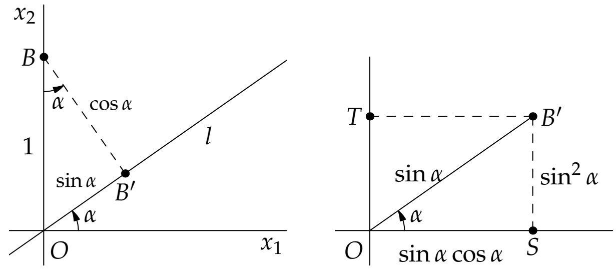
(a) A' is het beeld van $A(1,0)$



(b) Coördinaten van A'

Figuur 15.39: Projectie van $A(1,0)$op lijn l door O die hoek α maakt met de positieve x_1-as

In figuur 15.39a zie je het beeldpunt A' van de projectie van $A(1,0)$ op lijn l. In driehoek AOA' is OA' gelijk aan $\cos\alpha$. De vraag is wat de coördinaten van het beeldpunt A' zijn. In figuur 15.39b zie je dat in driehoek SOA' geldt: $SA' = \sin\alpha\cos\alpha$ (wegens $\sin\alpha = \frac{SA'}{OA'} = \frac{SA'}{\cos\alpha}$). Evenzo is $OS = \cos^2\alpha$. De coördinaten van A' zijn dus $(\cos^2\alpha, \sin\alpha\cos\alpha)$.
In figuur 15.40a zie je het beeld B' van $B(0,1)$. In driehoek OBB' is hoek $OBB' = \alpha$, en dus is $OB' = \sin\alpha$. De coördinaten van B' volgen uit de lengtes van de rechthoekszijden in driehoek OSB' in figuur 15.40b: $(\sin\alpha\cos\alpha, \sin^2\alpha)$.



(a) B' is het beeld van $B(0,1)$

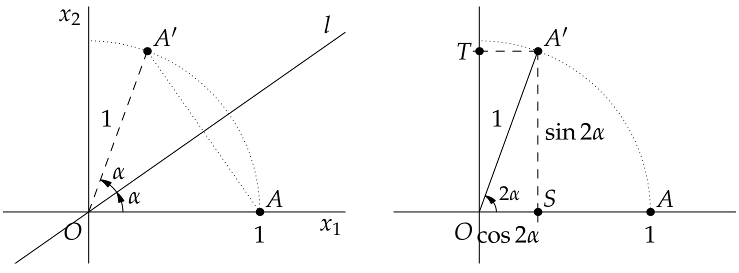
(b) Coördinaten van B'

Figuur 15.40: Projectie van $B(0,1)$ op lijn l door O die hoek α maakt met de positieve x_1-as

Voor de matrix van de afbeelding geldt dus:

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

136.

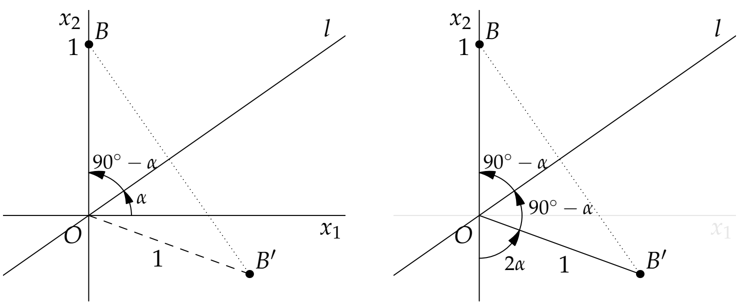


(a) A' is het beeld van $A(1,0)$

(b) Coördinaten van A'

Figuur 15.41: Spiegeling van punt $A(1,0)$ in lijn l door O die hoek α maakt met de positieve x_1-as

In figuur 15.41a zie je het beeldpunt A' van de spiegeling van $A(1,0)$ in lijn l. Vanwege de symmetrie van de spiegeling is de lengte van OA' gelijk aan 1, en de hoek die OA' met l maakt is α, dus de hoek die OA' met de positieve x_1-as maakt is 2α. De coördinaten van A' zijn af te lezen in figuur 15.41b: $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$.



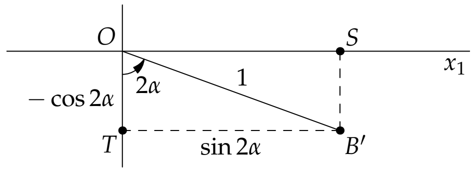
(a) B' is het beeld van $B(0,1)$

(b) Hoek tussen OB' en negatieve $x2$-as is 2α

Figuur 15.42: Spiegeling van $B(0,1)$ in lijn l door O die hoek α maakt met de positieve x_1-as

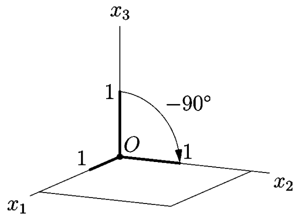
In figuur 15.42a zie je het beeldpunt B' van $B(0,1)$. De hoek tussen OB en l is $90^\circ - \alpha$. Vanwege de symmetrie van de spiegeling is de hoek tussen OB' en l ook $90^\circ - \alpha$. Voor de hoek tussen OB' en de negatieve x_2-as blijft dus 2α over (zie figuur 15.42b).
De coördinaten van B' kun je aflezen in driehoek $OB'T$ in figuur 15.43: $B'(\sin 2\alpha, -\cos 2\alpha)$. De afbeeldingsmatrix is dus:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$



Figuur 15.43: Coördinaten van B'

137. a. Zie figuur 15.44. Je kunt in de figuur vrij makkelijk zien waar de eenheidsvectoren na rotatie terecht komen:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$



Figuur 15.44: Rotatie over $-90°$ om de x_1-as

b. Bij een rotatie R om de x_3-as geldt: $R\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
De rotatie van vectoren in het x_1x_2-vlak kun je beschrijven met de rotatiematrix uit voorbeeld 11.4: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Toegepast op de driedimensionale afbeelding $R_{x_3,-150°}$ levert dit:

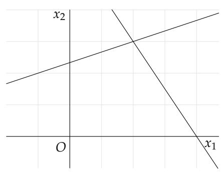
$$\begin{pmatrix} \cos(-150°) & -\sin(-150°) & 0 \\ \sin(-150°) & \cos(-150°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Voor een rotatie R om de x_2-as geldt: $R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
De rotatie in het x_1x_3-vlak kun je beschrijven met de rotatiematrix uit voorbeeld 11.4: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Toegepast op de driedimensionale afbeelding $R_{x_2,135°}$ levert dit: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

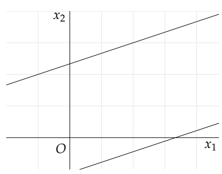
138. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

15.12 *Uitwerkingen hoofdstuk 12*

139. a. De lijnen snijden elkaar; het stelsel heeft één oplossing. Voor de verhoudingen tussen coëfficiënten van x_1 en x_2 geldt: $\frac{1}{3} \neq -\frac{3}{2}$.
b. De lijnen vallen samen; het stelsel heeft oneindig veel oplossingen. Voor de verhoudingen tussen coëfficiënten van x_1 en x_2 geldt: $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$, en dit is ook nog eens gelijk aan $\frac{-7}{-14}$.
c. De lijnen zijn evenwijdig; het stelsel heeft geen oplossingen. Voor de verhoudingen tussen coëfficiënten van x_1 en x_2 geldt: $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$, en dit is niet gelijk aan $\frac{-7}{-10}$.



Figuur 15.45: Snijdende lijnen: 1 oplossing



Figuur 15.46: Evenwijdige lijnen: geen oplossing

140.(a) Als $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ is er één oplossing.

(b) Als $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{p}{q}$ zijn er geen oplossingen

(c) Als $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{p}{q}$ zijn er oneindig veel oplossingen.

141. a. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 \neq 0$, dus er is 1 oplossing (snijdende lijnen).

b. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0 \neq 0$, dus er zijn geen, of oneindig veel oplossingen. Omdat $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ vallen de lijnen samen. Er zijn dus oneindig veel oplossingen.

142. a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 1. \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} - 2. \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} + -4. \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$
$1 \cdot 0 - 2 \cdot 28 - 4 \cdot -14 = 0$. Er zijn dus geen of oneindig veel oplossingen. Het is makkelijk in te zien dat $(0,0,0)$ een oplossing is, dus 'geen oplossing' is niet mogelijk. Blijft over: er zijn oneindig veel oplossingen.

b. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2. \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3. \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + -1. \cdot \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$2 \cdot 16 - 3 \cdot 10 - 1 \cdot 2 = 0$.
Er zijn dus geen of oneindig veel oplossingen. Je ziet dat de eerste twee vergelijkingen precies een factor -2 verschillen. Er blijven dus twee vergelijkingen met drie onbekenden over:
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = & 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = & 3 \end{cases}$
Je kunt de waarde van een van de variabelen vrij kiezen, bijvoorbeeld $x_3 = 0$. Je houdt dan over: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 4 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$
De determinant van dit stelsel is ongelijk aan nul, en dus heeft dit stelsel een oplossing, en daarmee ook het oorspronkelijke stelsel. Dus zijn er oneindig veel oplossingen.
Een andere manier om er naar te kijken is deze: de twee vergelijkingen met drie onbekenden stellen twee vlakken voor, die niet evenwijdig zijn, De normaalvectoren hebben immers verschillende richtingen. Dus de twee vlakken snijden elkaar: ze hebben een snijlijn, dat wil zeggen dat er oneindig veel oplossingen zijn.

143. a. $\det(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$, dus de vectoren zijn onafhankelijk en vormen een basis.

b. Er moet gelden: $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dit is gelijkwaardig met het volgende stelsel: $\begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda + 4\mu & = -1 \end{cases}$ De vergelijkingen van elkaar aftrekken levert: $\mu = -\frac{2}{3}$, en dus $\lambda = \frac{5}{3}$.

144. a. $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $-1 + 3 - 4 = -2$. De drie vectoren zijn dus onafhankelijk.

b. Er moet gelden: $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ofwel:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma &= 1 \\ 2\beta + 3\gamma &= 1 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3 \end{cases}$$

Dit stelsel oplossen levert: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ en $\gamma = -1$, dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

145.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -\frac{1}{2} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{v} \begin{array}{c} \begin{matrix} -\frac{1}{2} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{v} \begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \frac{2}{13} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{v} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \frac{2}{13} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -11/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & & \frac{3}{2} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{v} \begin{array}{c} \begin{matrix} + & & \frac{3}{2} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -36/13 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -11/13 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{v} \begin{pmatrix} -41/13 & 0 & -36/13 \\ 0 & -5 & 0 \\ -36/13 & 0 & -11/13 \end{pmatrix}$$

En rechts staat de gevraagde matrix.

146. De afbeeldingsmatrix is $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

147. Stel $\underline{p} = \overrightarrow{OP}$ en $\underline{q} = \overrightarrow{OQ}$. Omdat P en Q op een lijn door O liggen is er een $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt: $\underline{p} = \alpha\underline{q}$. Dus voor het beeld $f(\underline{p})$ geldt: $f(\underline{p}) = f(\alpha\underline{q}) = \alpha f(\underline{q})$, omdat f lineair is. Dus het beeld $f(\underline{p})$ en het beeld $f(\underline{q})$ liggen ook op een lijn door O.

148. Voor de snijpunten met de x_1-as geldt dat $x_2 = 0$. Voor l is dat het geval als $\lambda = -2$, en voor m als $\mu = 0$. Voor deze waarden van λ en μ zijn de x_1-waarden respectievelijk -3 en 1. Dus $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt op $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ afgebeeld.

Voor de snijpunten met de x_2-as geldt dat $x_1 = 0$, dat is bij $\lambda = -1$ en bij $\mu = -1$. Dat betekent dat $\binom{0}{2}$ op $\binom{0}{-4}$ wordt afgebeeld. Dus $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Dit levert als afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

149. a. Noem de spiegeling S. Neem als basisvectoren een richtingsvector en normaalvector van l. Er geldt $S\binom{1}{2} = \binom{1}{2}$ en $S\binom{2}{-1} = \binom{-2}{1}$. Na vegen volgt hieruit dat $S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Noem de projectie P, er geldt: $P\binom{1}{2} = \binom{1}{2}$ en $P\binom{2}{-1} = \binom{0}{0}$. Na vegen volgt dat $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

c. Voor deze afbeelding V geldt: $V(\underline{r}_m) = \underline{r}_m$ en $V(\underline{r}_l) = 3\underline{r}_l$. Dus $V\binom{1}{4} = \binom{1}{4}$ en $V\binom{1}{2} = \binom{3}{6}$. Na vegen volgt $V = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

150.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -1 & + \\ + & -3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -1 & + \\ + & -3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\frac{1}{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\frac{1}{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & & 7 \\ & + & -2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & & 7 \\ & + & -2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1/4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\frac{1}{3} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\frac{1}{3} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -25/4 & 5/2 & 1/4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -9/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25/12 & 5/2 & 1/4 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 25/12 & 5/12 & 1/4 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Na het in de juiste volgorde zetten van de kolommen, volgt voor de matrix van de f: $\begin{pmatrix} 5/12 & 1/4 & 25/12 \\ 2/3 & 0 & -2/3 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

151. Na vegen blijkt (aan de linkerkant, dus bij de originelen) een kolom met louter nullen te ontstaan. De gegeven originelen zijn een afhankelijk stelsel. Je kunt dus niet vegen tot je de eenheidsmatrix krijgt, en geen afbeeldingsmatrix voor f geven, omdat er nog een essentieel gegeven ontbreekt.

152. Als originelen kun je, behalve P, twee punten van de lijn nemen, bijvoorbeeld het steunpunt $S(2, 1, -1)$ dat hoort bij $\lambda = 0$, en het punt $Q(0, 1, 3)$ dat hoort bij $\lambda = -2$. Dit betekent voor f:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & -1 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \begin{matrix} + & -1 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \frac{1}{2} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \begin{matrix} \frac{1}{2} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \frac{1}{7} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \frac{1}{7} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & & 2 \\ & + & -3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \begin{matrix} + & & 2 \\ & + & -3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 6/7 & 12/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/7 & 4/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Dus de matrix bij f is: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

153. a. Neem als basisvectoren (zie paragraaf 12.8) een normaalvector van V, bijvoorbeeld $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, en twee onafhankelijke

richtingsvectoren (vectoren in het vlak V), zoals $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De afbeelding wordt dan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Na vegen krijg je de matrix: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b. Neem als basis een richtingsvector van l en twee vectoren loodrecht op l (zie paragraaf 12.8), dus twee vectoren waarvan het inproduct met de richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nul is. De afbeelding wordt dan bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit levert na vegen de volgende matrix: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Neem als basis een normaalvector van V, $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en twee onafhankelijke vectoren in het vlak, bijvoorbeeld $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit levert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Na vegen ontstaat de afbeeldingsmatrix: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

15.13 *Uitwerkingen hoofdstuk 13*

154. a. $\ker f = \{\underline{0}\}$
b. $\ker f = \{\underline{0}\}$
c. $\ker f = x_2$-as
d. $\ker f$ is de lijn $x_1 = -x_2$

155. a. $\ker f = \{\underline{0}\}$
b. $\ker f = \{\underline{0}\}$
c. Als $k \neq 0$ is $\ker f = \{\underline{0}\}$. Als $k = 0$ is $\ker f = \mathbb{R}^2$
d. $\ker f = \{\underline{0}\}$

156. a. Het volledig origineel van $\underline{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix}$ zijn de vectoren $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ waarvoor geldt dat

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen, los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 23 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 34 \end{cases}$$

Dit levert $x_1 = 5$ en $x_2 = 6$. Dus het volledig origineel van $\binom{23}{34}$ bestaat uit de vector $\binom{5}{6}$.

b. Een punt op de lijn $l\colon x_1 = x_2$ heeft vorm $A(a, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Voor het volledig origineel van deze punten geldt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen, los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= a \\ 2x_1 + 4x_2 &= a \end{cases}$$

Hieruit volgt $2x_1 + 4x_2 = x_1 + 3x_2$, ofwel $x_2 = -x_1$. Dus het volledig origineel van de lijn $x_1 = x_2$ is de lijn $x_2 = -x_1$.

157. Gegeven is de afbeelding f met matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Het volledig origineel vind je door $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ als stelsel te schrijven en op te lossen. De oplossing, en dus het volledig origineel van $\binom{3}{4}$, is $\binom{-17}{-10}$.

b. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ oplossen levert $\binom{0}{0}$. Dus $\ker f = \{\underline{0}\}$.

158. Stel (a, b) is een willekeurig punt van l. De vraag is dus voor welke (x_1, x_2) geldt $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$? Ofwel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= a \\ x_1 - x_2 &= b \end{cases}$$

met $2a + 3b = 4$. Dus $2(2x_1 + 3x_2) + 3(x_1 - x_2) = 4$. Dus $7x_1 + 3x_2 = 4$ is de vergelijking van het volledig origineel van l.

159. a. Stel (a, b) is een willekeurig punt van de cirkel. De vraag is dus voor welke (x_1, x_2) geldt $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$? Ofwel:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= a \\ 2x_1 + x_2 &= b \end{cases}$$

met $a^2 + b^2 = 5$. Dus $(-x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 5$. Hieruit volgt $5x_1^2 + 5x_2^2 = 5$, ofwel de eenheidscirkel $x_1^2 + x_2^2 = 1$ is de vergelijking van het volledig origineel van de gegeven cirkel.

b. De vergelijking van een willekeurige cirkel met middelpunt O en straal r is $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Analoog aan het vorige onderdeel vind je $5x_1^2 + 5x_2^2 = r^2$, dus het volledig origineel heeft als vergelijking $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{5}r^2$, en dat is een cirkel met zijn middelpunt in O.

160. a. Bijvoorbeeld $R_{O,\alpha}$.

b. Projectie op een lijn door O.

161. a. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.
b. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.
c. $\operatorname{Im} f$ is de x_1-as.
d. $\operatorname{Im} f$ is de lijn $x_1 = x_2$.

162. a. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$
b. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$
c. Als $k \neq 0$ is $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Als $k = 0$ is $\operatorname{Im} f = \{\underline{0}\}$.
d. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

163. (i) Als $\underline{a} = \underline{b} = \underline{c} = \underline{0}$, dan is A de nulmatrix en is $\operatorname{Im} f = \{\underline{0}\}$.
(ii) Als een van de drie $\neq \underline{0}$ is, bijvoorbeeld $\underline{a} \neq \underline{0}$ en de andere twee zijn veelvouden van $\underline{a}$, dat wil zeggen dat er getallen $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ bestaan, zodanig dat $\underline{b} = \beta\underline{a}$ en $\underline{c} = \gamma\underline{a}$, dan is $\operatorname{Im} f$ de lijn door O met vectorvoorstelling $\underline{x} = \lambda\underline{a}$. Evenzo als een van de andere kolomvectoren $\neq \underline{0}$ is.
(iii) Als twee van de drie $\neq \underline{0}$ zijn en onafhankelijk van elkaar, zeg $\underline{a}$ en $\underline{b}$, en de derde, $\underline{c}$ dus, is afhankelijk van de eerste twee, dat wil zeggen dat er getallen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bestaan, zodanig dat $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, dan is $\operatorname{Im} f$ het vlak opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$. De vectorvoorstelling van het vlak is $\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}$. Evenzo voor andere combinaties.
(iv) Als de drie vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ onafhankelijk zijn, is $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

164. Een normaalvector van l is $\underline{n} = \binom{2}{3}$, dus een richtingsvector van l is $\underline{n} = \binom{-3}{2}$. Verder is $\underline{s} = \binom{2}{0}$ een steunvector, dus een vectorvoorstelling van l is:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als je op deze vectorvoorstelling de matrix A toepast krijg je:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6\lambda + 6\lambda \\ 2 - 3\lambda - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 - 5\lambda \end{pmatrix}$$

Dus een vectorvoorstelling van het beeld van l is:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

165. a. $\operatorname{Im} f$ bestaat uit alle mogelijke lineaire combinaties van de kolomvectoren, en deze zijn in dit geval afhankelijk.
$\operatorname{Im} f = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
b. $\ker f$ volgt uit $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit is gelijkwaardig met $2x_1 - 4x_2 = 0$ (de andere vergelijking is afhankelijk), ofwel $x_1 = 2x_2$.

166. a. Een vectorvoorstelling van PQ is $\underline{x} = \underline{p} + \lambda(\underline{p} - \underline{q})$. Er geldt $A\underline{p} = A\underline{q} = \underline{b}$. Hieruit volgt, en ook omdat A lineair is dat

$A(\underline{p}-\underline{q}) = A\underline{p} - A\underline{q} = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$. Verder geldt:

$$A\underline{x} = A\left[\underline{p} + \lambda(\underline{p}-\underline{q})\right] = A\underline{p} + \lambda A(\underline{p}-\underline{q}) = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$$

Dus een willekeurig punt van de lijn PQ wordt op B afgebeeld.

b. Een lijn evenwijdig aan PQ heeft vectorvoorstelling $\underline{x} = \underline{s} + \lambda(\underline{p}-\underline{q})$ ($\underline{s}$ is een steunvector van de lijn). Hierop A toepassen levert:

$$A\left[\underline{s} + \lambda(\underline{p}-\underline{q})\right] = A\underline{s} + \lambda A(\underline{p}-\underline{q}) = A\underline{s} + \underline{0} = A\underline{s}$$

Dus alle punten van een lijn evenwijdig aan PQ hebben hetzelfde beeld $A\underline{s}$.

167. Er geldt: $V_{x_2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $R_{O,60^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a. Dus $V_{x_2,2} \circ R_{O,60^\circ} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b. En $R_{O,60^\circ} \circ V_{x_2,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. $V_{x_2,2} \circ R_{O,60^\circ} \neq R_{O,60^\circ} \circ V_{x_2,2}$, dus het samenstellen van afbeeldingen is in het algemeen niet commutatief.

168. $S_{x_2\text{-as}} \circ S_{x_1\text{-as}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
De laatste matrix is inderdaad die van S_O. Dit product is commutatief, wat je ook meetkundig eenvoudig kunt inzien.

169. $S_{x_2=0} \circ \left[S_O \circ S_{x_1=0}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S_{x_3=0}$

15.14 *Uitwerkingen hoofdstuk 14*

170. Uit opgave 136 weet je dat de spiegeling wordt gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$. Voor elke spiegeling geldt dat hij zijn eigen inverse is, dus is deze matrix ook die van de inverse.

171. De inverse van een rotatie om O over een hoek α, is een rotatie om O over een hoek $-\alpha$. De rotatiematrix van de inverse is dus $R_{O,-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

172. $\underline{u} \in \operatorname{Im} f$, dus er is een $\underline{a}$ zodanig dat $f(\underline{a}) = \underline{u}$, en $\underline{a} = f^{-1}(\underline{u})$.
Dus $f^{-1}(\lambda\underline{u}) = f^{-1}(\lambda f(\underline{a})) \stackrel{f \text{ is lineair}}{=} f^{-1}(f(\lambda\underline{a})) = \lambda\underline{a} = \lambda f^{-1}(\underline{u})$.
Hiermee is punt 2 van stelling 14.1 bewezen.

173. a. Uit opgave 136 weet je dat de afbeeldingsmatrix van de spiege-

ling is: $S = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$.
De determinant is:
$\det S = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = -1 \neq 0,$
dus is de afbeelding regulier.

b. $R_{O,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
De determinant is: $\det R_{O,\alpha} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0.$
Dus is de afbeelding regulier.

174. a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
b. $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
c. Heeft geen inverse, de determinant is 0.
d. Als $\lambda = 0$ is de determinant 0, en is er geen inverse.
Als $\lambda \neq 0$ is de inverse: $\begin{pmatrix} -1/\lambda & -1/\lambda \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

175. $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$= \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Evenzo voor $A^{-1} \cdot A$.

176. a. $\det M_a = a^2(a-1) - 2a = a^3 - a^2 - 2a = a(a^2 - a - 2) = a(a+1)(a-2)$.
Dus $\det M_a = 0$, voor $a = 0$, $a = -1$ of $a = 2$. Voor deze waarden van a is f_a singulier.

b. i. $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Voor het beeld van een willekeurige vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ geldt: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha-\beta \end{pmatrix}$.
Omdat α en β alle mogelijke waarden kunnen aannemen, en dus $2\alpha - \beta$ ook, is $\operatorname{Im} f_0 = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ofwel de x_2-as.
$\ker f_0$ vind je uit: $M_0.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $2x_1 - x_2 = 0$, dit is een lijn door O.

ii. $M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Dus $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ 2\alpha-2\beta \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Omdat α en β alle mogelijke waarden kunnen aannemen, en dus $\alpha - \beta$ ook, is $\operatorname{Im} f_{-1} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ofwel een lijn door O.
$\ker f_{-1}$ volgt uit: $M_{-1}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $x_1 - x_2 = 0$, dit is een lijn door O.

iii. $M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dus $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+2\beta \\ 2\alpha+\beta \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Omdat α en β alle mogelijke waarden kunnen aannemen, en dus $\alpha + \beta$ ook, is $\operatorname{Im} f_2 = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ofwel een lijn door O.
$\ker f_2$ volgt uit: $M_2.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $2x_1 + x_2 = 0$, dit is een lijn door O.

177. a. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$, dus heeft f een inverse.

b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\begin{cases} \alpha - \beta & = 2 \\ 2\alpha + 3\beta & = 3 \end{cases}$

Oplossen levert $\alpha = \frac{9}{5}$ en $\beta = -\frac{1}{5}$. Dus het origineel van P is het punt $(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5})$.

c. De inverse matrix is $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

178. a. Uit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ volgt: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 0 \end{cases}$

Stel $x_2 = \lambda$, dan volgt uit de eerste vergelijking van het stelsel dat $x_1 = -2\lambda$. Deze waarden van x_1 en x_2 invullen in de tweede en derde vergelijking levert: $-4\lambda - \lambda + 5x_3 = 0$ en $2\lambda + 2\lambda - 4x_3 = 0$. Uit beide vergelijkingen volgt $x_3 = \lambda$.
Uit dit alles volgt: $\ker f = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Omdat $\ker f \neq \{\underline{0}\}$ is f singulier. De kolomvectoren van de matrix zijn dus afhankelijk. Duidelijk is dat bijvoorbeeld de eerste en tweede kolom wel onafhankelijk zijn van elkaar (de een is niet een veelvoud van de ander).
Dus $\operatorname{Im} f = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, een vlak door O.

179. a. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$
$= 2(8-9) - (-4+3) + (3-2) = -2 + 1 + 1 = 0$.
Dus is f singulier.

b. De afbeelding is singulier, dus de kolomvectoren van de matrix zijn afhankelijk. Duidelijk is dat bijvoorbeeld de eerste en tweede kolom wel onafhankelijk zijn van elkaar (de een is niet een veelvoud van de ander).
Dus $\operatorname{Im} f = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, een vlak door O.

c. Uit $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ volgt: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$
De laatste twee vergelijkingen bij elkaar optellen levert: $-x_2 + x_3 = 0$, ofwel $x_2 = x_3$. Invullen in de eerste vergelijking levert: $2x_1 + 2x_3 = 0$, ofwel $x_1 = -x_3$.
Dus $\ker f = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d. Stel $\underline{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\underline{s}$ is een willekeurige (steun)vector. Een lijn evenwijdig aan $\ker f$ is $\underline{x} = \underline{s} + \lambda\underline{r}$. Dus voor de punten bij de vector $\underline{x}$ van deze lijn geldt: $f(\underline{x}) = f(\underline{s}) + f(\lambda\underline{r})$. Omdat $\lambda\underline{r} \in \ker f$ geldt $f(\lambda\underline{r}) = \underline{0}$. Dus $f(\underline{x}) = f(\underline{s})$, dat wil zeggen dat alle punten van de lijn hetzelfde beeldpunt hebben.

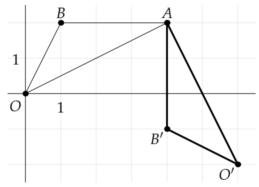
180. a. Eerst transleren van A naar O, roteren over 90°, dan terug

transleren van O naar A.

b. Je hebt homogene coördinaten nodig omdat een translatie in $\mathbb{R}^2$ geen lineaire transformatie is.

c.
$$R_{A,90^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $O(0,0)$ komt op $(6,-2)$ terecht.
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $B(1,2)$ komt op $(4,-1)$ terecht, zie figuur 15.47.



Figuur 15.47: Rotatie over 90° om A