

GERTJAN LAAN

ANALYSEBOEK

UITGEVERIJ CZARINA

Copyright © 2017 Gertjan Laan
Versie 3.1

UITGEVERIJ CZARINA
www.uitgeverijczarina.nl
www.gertjanlaan.nl

tufte-latex.github.io/tufte-latex
DRUK: PUMBO.NL

ISBN 978 94 92481 02 3
NUR 123

Gedrukt in november 2017

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Deel II

Uitwerkingen

9

Uitwerkingen hoofdstuk 1

1. **Even** = $\{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
2. **Oneven** = $\{n \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$
3. **Drievouden** = $\{n \mid n = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$
4. **Negatieve gehele getallen** = $\{n \mid n < 0, n \in \mathbb{Z}\}$
5. Stel $a \in \text{Even}$ en $b \in \text{Even}$. Dan geldt: $a = 2k_1$ en $b = 2k_2$ voor zekere $k_1 \in \mathbb{Z}$ en $k_2 \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt: $a + b = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$. Dus $a + b$ is van de vorm $2k$, met $k = k_1 + k_2$. Dus $a + b \in \text{Even}$
6. Stel $a \in \text{Even}$ en $b \in \text{Even}$. Dan is: $a = 2k_1$ en $b = 2k_2$ voor zekere $k_1 \in \mathbb{Z}$ en $k_2 \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt: $ab = 2k_1 \cdot 2k_2 = 2(2k_1k_2)$. Dus ab is van de vorm $2k$, met $k = 2k_1k_2$. Dus $a + b \in \text{Even}$
7. De verzameling van de oneven getallen is niet gesloten voor de optelling. Om dat aan te tonen heb je aan één tegenvoorbeeld genoeg, zoals: $3 + 5 = 8$. In het algemeen geldt: twee oneven getallen bij elkaar opgeteld leveren een even getal.
8. De verzameling van de oneven getallen is gesloten voor de vermenigvuldiging.

Stel $a \in \text{Oneven}$ en $b \in \text{Oneven}$. Dan is: $a = 2k_1 + 1$ en $b = 2k_2 + 1$ voor zekere $k_1 \in \mathbb{Z}$ en $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Hieruit volgt: $ab = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$. Dus ab is van de vorm $2k + 1$, met $k = 2k_1k_2 + k_1 + k_2$. Dus $ab \in \text{Oneven}$

9.

	OPTELLEN	VERMENIG- VULDIGEN	AFTREKKEN	DELEN (niet door nul)
commutatief?	ja	ja	nee	nee
associatief?	ja	ja	nee	nee

10. $\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$

11. $\frac{7}{32} = 0.21875$

12. $\frac{47}{200} = 0.235$

13. $\frac{8}{17} = 0.\overline{4705882352941176}$

14. $x = 0.\overline{17}$, dus $100x = 17.\overline{17}$. Trek deze beide van elkaar af en je vindt $99x = 17$, oftewel $x = \frac{17}{99}$

15. $x = 0.\overline{9}$, dus $10x = 9.\overline{9}$. Trek deze beide van elkaar af en je vindt $9x = 9$ oftewel $x = 1$. Dit is een wel heel bijzonder resultaat: $0.99999\dots$, een oneindig voortlopende rij negens, dat gelijk is aan 1.
16. $x = 2.\overline{47}$, dus $100x = 247.\overline{47}$. Trek deze beide van elkaar af en je vindt $99x = 245$, oftewel $x = \frac{245}{99}$.
17. $x = 3.9\overline{14765}$, dus $1000000x = 3914765.\overline{14765}$ en $10x = 39.\overline{14765}$. Trek deze beide van elkaar af en je vindt: $999990x = 3914726$, oftewel $x = \frac{3914726}{999990}$.
18. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} - \frac{2}{18} = \frac{13}{18}$
19. $\frac{3}{5} + \frac{7}{21} + \frac{3}{4} = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{36}{60} + \frac{20}{60} + \frac{45}{60} = \frac{101}{60}$
20. $\frac{3}{5} \cdot 12 \cdot \frac{7}{3} = \frac{12 \cdot 7}{5} = \frac{84}{5}$
21. $\frac{10/18}{5/27} = \frac{10}{18} \cdot \frac{27}{5} = \frac{27}{18} \cdot \frac{10}{5} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$
22. $x + \frac{x}{y} = \frac{xy + x}{y}$, of $\frac{x(y+1)}{y}$
23. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2}{xy} + \frac{x^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$
24. $\frac{x+3}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{x(x+3)}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2 + 3x + 3x - 3}{x(x-1)} = \frac{x^2 + 6x - 3}{x(x-1)}$
25. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{2x^2}{2x^2y} + \frac{2y}{2x^2y} + \frac{x^2y}{2x^2y} = \frac{2x^2 + 2y + x^2y}{2x^2y}$
26. $\frac{xy^2z^3}{xyz} = yz^2$
27. $\frac{4x(x+1) + 6x^3}{2x(x+1)} = \frac{2x[2(x+1) + 3x^2]}{2x(x+1)} = \frac{2(x+1) + 3x^2}{x+1} = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x+1}$
28. $\frac{2xy}{x^2z} - \frac{3x+y}{xyz} = \frac{2y}{xz} - \frac{3x+y}{xyz} = \frac{2y^2}{xyz} - \frac{3x+y}{xyz} = \frac{2y^2 - 3x - y}{xyz}$
29. $\frac{(x+1)^2(x+2)^4(x-5)^3}{(x+1)(x-5)^2(x+2)^6} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x+2)^2}$, of $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 4x + 4}$
30. Het product van twee rationale getallen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ is: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Dit is een rationaal getal, want ac en bd zijn beide elementen van $\mathbb{Z}$.
31. De som van twee rationale getallen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ is: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, en dit is een rationaal getal.
32. De verzameling irrationale getallen is niet gesloten voor de optelling, er geldt bijvoorbeeld: $\frac{1}{2}\pi + (-\frac{1}{2}\pi) = 0$. Zowel $\frac{1}{2}\pi$ als $-\frac{1}{2}\pi$ is irrationaal, maar 0 is rationaal.
33. De verzameling irrationale getallen is niet gesloten voor de vermenigvuldiging, er geldt bijvoorbeeld: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. En $\sqrt{2}$ is irrationaal, maar 2 is rationaal, en dus niet irrationaal.

34. Geef een getallenvoorbeeld bij elk van de eigenschappen 2 tot en met 7 van ongelijkheden uit paragraaf 1.13.
2. $2 < 4$ en $4 < 6$, dan geldt $2 < 6$
 3. $2 < 4$, dan is $2 + 10 < 4 + 10$ (en ook $2 - 10 < 4 - 10$)
 4. $2 < 4$ en $3 < 5$, dan is $2 + 3 < 4 + 5$
 5. $2 < 4$, dan is $2 \cdot 5 < 4 \cdot 5$
 6. $2 < 4$, dan is $2 \cdot -5 > 4 \cdot -5$
 7. $0 < 2 < 4$, dan is $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$
35. De breuk $\frac{1}{n}$ levert een eindige decimale breuk als in de staartdeling rest 0 komt. Voorbeelden daarvan zijn $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$ of $\frac{1}{100} = 0.01$. Voor welke getallen n is dat nog meer het geval? Als eerste kun je opmerken dat het niet uitmaakt of je $\frac{1}{n}$, $\frac{10}{n}$, of $\frac{100}{n}$ of $\frac{10^k}{n}$ uitrekent (k een positief geheel getal), alle uitkomsten bevatten dezelfde cijfers, in de uitkomst is alleen de decimale punt verplaatst. De vraag is dus welke getallen n een deler zijn van 10^k (waarbij k een positief geheel getal is). Omdat $10 = 2 \cdot 5$, is $10^k = (2 \cdot 5)^k = 2^k 5^k$, dus delers van 10^k zijn machten van 2 (tot 2^k), machten van 5 (tot 5^k), en combinaties van die twee. Voorbeelden zijn $n = 2^3 = 8$, $n = 5^2 = 25$ en $n = 2^3 5^2 = 200$. Dus in het algemeen levert $\frac{1}{n}$ een eindige decimale breuk als n van de vorm $2^p 5^q$ is, waarbij $p, q \in \mathbb{N}$
36. Stel dat $1 + \pi$ een *rationaal* getal is. Dan geldt: $1 + \pi = \frac{a}{b}$, voor zekere $a, b \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt $\pi = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b} = \frac{c}{b}$, met $c = a - b$. Dus π is van de vorm $\frac{c}{b}$ met c en $b \in \mathbb{Z}$ en dus is π rationaal. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat π irrationaal is. Dus kan $1 + \pi$ niet rationaal zijn, maar moet irrationaal zijn. Voor $2 + \pi$ gaat het bewijs analoog. Hieruit volgt ook, dat als je eenmaal een irrationaal getal hebt, je oneindig veel andere irrationale getallen kunt maken door er een geheel getal bij op te tellen.
37. Stel dat $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ *rationaal* is. Dan geldt: $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, voor zekere $a, b \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt $\sqrt{2} = \frac{2a}{b}$, en dus is $\sqrt{2}$ rationaal. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Dus moet $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ irrationaal zijn.
38. Noem het irrationale getal x , en het rationale getal r . Dan is r te schrijven als $\frac{a}{b}$. Stel dat de som van x en r rationaal is. Dan is $x + r = \frac{c}{d}$, dus is $x + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en dus is $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd}$, en dat zou betekenen dat x rationaal is, wat in tegenspraak is met het gegeven.
39. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ en $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Wat deze aan factoren gemeenschappelijk hebben is $2 \cdot 2$. Dus de ggd is 4. Het kgv is $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. Alternatief: de ggd bereken je met $28 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. Dus de ggd

is 4. Het kgv is (zie stelling 1.16) $k = \frac{12 \cdot 28}{4} = 84$.

40. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ en $1060 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 53$. Dus de ggd is $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Het kgv is $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 53 = 5300$

Alternatief: de ggd bereken je met $1060 \rightarrow 100 \rightarrow 60 \rightarrow$

$40 \rightarrow 20 \rightarrow 0$. Dus de ggd is 20. Met stelling 1.16 vind je

$$k = \frac{100 \cdot 1060}{20} = 5300.$$

41. $17 = 17$ en $20 = 2^2 \cdot 5$. De ggd is 1, het kgv is $2^2 \cdot 5 \cdot 17 = 340$.

Alternatief: de ggd bereken je met $20 \rightarrow 17 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Dus de ggd is 1. Met stelling 1.16 vind je $k = \frac{17 \cdot 20}{1} = 340$.

42. $17 = 17$ en $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. De ggd is 17, het kgv is $2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$.

Alternatief: de ggd bereken je met $102 \rightarrow 17 \rightarrow 0$. Dus de ggd is

17. Met stelling 1.16 vind je $k = \frac{17 \cdot 102}{17} = 102$.

43. $104 = 2^3 \cdot 13$ en $221 = 13 \cdot 17$. Dus de ggd is 13. Het kgv is

$$2^3 \cdot 13 \cdot 17 = 1768.$$

Alternatief: de ggd bereken je met $221 \rightarrow 104 \rightarrow 13 \rightarrow 0$, dus de

ggd = 13. Met stelling 1.16 vind je $k = \frac{104 \cdot 221}{13} = 1768$.

44. $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ en $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Dus de ggd is

$$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42. \text{ Het kgv is } 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110880.$$

Alternatief: de ggd bereken je met $2310 \rightarrow 2016 \rightarrow 294 \rightarrow$

$252 \rightarrow 42 \rightarrow 0$, dus de ggd = 42. Met stelling 1.16 vind je

$$k = \frac{2016 \cdot 2310}{42} = 110880.$$

45. $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ en $21 = 3 \cdot 7$. Dus de ggd is 3.

Het kgv is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Als alternatief kun je ggd(a, b, c) uitrekenen met ggd(ggd(a, b), c),

en kgv(a, b, c) met kgv(kgv(a, b), c), maar dit lijkt meer werk.

46. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ en $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Dus de ggd is $2 \cdot 3 = 6$. Het kgv is $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

47. ggd(12, 28) = 4, dus deel teller en noemer door 4: $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

kgv(12, 28) = 84, dus maak 84 van beide noemers: $\frac{5}{12} + \frac{5}{28} = \frac{35}{84} + \frac{15}{84} = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$.

48. ggd(104, 221) = 13, dus deel teller en noemer door 13: $\frac{104}{221} = \frac{8}{17}$.

kgv(104, 221) = 1768, dus maak 1768 van beide noemers:

$$\frac{1}{104} + \frac{1}{221} = \frac{17}{1768} + \frac{8}{1768} = \frac{25}{884}.$$

49. ggd(2016, 2310) = 42, dus deel teller en noemer door 42:

$$\frac{2016}{2310} = \frac{48}{55}.$$

kgv(2016, 2310) = 110880, dus maak 110880 van beide noemers:

$$\frac{3}{2016} - \frac{1}{2310} = \frac{3 \times 55}{110880} - \frac{24}{110880} = \frac{117}{110880} = \frac{13}{12320}.$$

50. $|10 - 2| = 8$

51. $|2 - 10| = 8$

52. $|\pi - 4| = 4 - \pi$, immers: $\pi - 4$ is negatief, dus $4 - \pi$ is positief.

53. $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

54. $|x| = x$, als $x > 0$

55. $|x| = -x$, als $x < 0$

56. $|x - 2| = x - 2$ als $x \geq 2$ en $|x - 2| = 2 - x$ als $x < 2$

57. $|x + 2| = x + 2$ als $x \geq -2$ en $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$ als $x < -2$

58. $|2x - 1| = 2x - 1$ als $x \geq \frac{1}{2}$ en $|2x - 1| = -(2x - 1) = -2x + 1$ als $x < \frac{1}{2}$

59. $|x^2 + 2| = x^2 + 2$, voor alle x

60. $x \geq -2$ en $x \leq 2$ is gelijkwaardig met $|x| \leq 2$

61. $-3 < x < 3$ is gelijkwaardig met $|x| < 3$

62. $x > 5$ of $x < -5$ is gelijkwaardig met $|x| > 5$

63. $\sqrt{x^2} = |x|$

64. Uit (1) volgt: $x - 2 = 6 \vee x - 2 = -6$, dus $x = 8 \vee x = -4$

65. Uit (2) volgt: $-6 < x - 2 < 6$, overal 2 bij optellen levert:
 $-4 < x < 8$

66. Uit (2) volgt: $-1 < x + 3 < 1$, overal -3 bij optellen levert:
 $-4 < x < -2$

67. Onderscheid drie gevallen:

a. $x \geq 2$ (en dus ook $x \geq 1$), b. $1 \leq x < 2$ en c. $x < 1$.

a. Als $x \geq 2$, dan is $|x - 1| + |x - 2| = x - 1 + x - 2 > 1$, dus $2x - 3 > 1$, dus $2x > 4$, oftewel $x > 2$.

b. Als $1 \leq x < 2$, dan is $|x - 1| + |x - 2| = x - 1 - (x - 2) = 1 > 1$.

Dit ($1 > 1$) is strijdig, dus heeft geen oplossing.

c. Als $x < 1$, dan is $|x - 1| + |x - 2| = 1 - x + 2 - x > 1$, dus $-2x + 3 > 1$, dus $-2x > -2$, oftewel $x < 1$ (dit is in overeenstemming met de beginvoorwaarde $x < 1$).

De oplossing is dus: $x < 1 \vee x > 2$.

68.

$$\begin{aligned} -8 &< x < 2 \\ -5 &< x + 3 < 5 \end{aligned}$$

Dus $|x + 3| < 5$.

69.

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} &\leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$.

70.

$$\begin{aligned} 2 &< x < 6 \\ -2 &< x - 4 < 2 \end{aligned}$$

Dus $|x - 4| < 2$.

71.

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ a - \frac{a+b}{2} &< x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} &< x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \\ -\frac{b-a}{2} &< x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}.$$

72.(a) Als $x > 0$ is $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = +1$. Als $x < 0$ is $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

(b) Als $x > 0$ is $\frac{|-x|}{-x} = \frac{x}{-x} = -1$.

Als $x < 0$ is $\frac{|-x|}{-x} = \frac{-x}{-x} = +1$

(c) Als $x > 0$ is $|x| - |-x| = x - x = 0$.

Als $x < 0$ is $|x| - |-x| = -x - (-x) = 0$

73. Pas definitie 1.19 toe:

Als $x \geq 0$, dan is $|x| = x$, en $|-x| = -(-x) = x$. Beide antwoorden zijn gelijk. Als $x < 0$, dan is $|x| = -x$, en $|-x| = -x$. Beide antwoorden zijn gelijk. Dus $\forall x : |x| = |-x|$.

74. Als $x \geq 0$, dan is $-x \leq 0$, en dus is $-x \leq x$ of: $-|x| \leq x$.

Uit $x \geq 0$ volgt ook $x = |x|$, dus samenvattend geldt: $-|x| \leq x = |x|$.

Als $x < 0$, dan is $-|x| = x$. Verder is dan $|x| > 0$, dus $x \leq |x|$, dus samenvattend geldt: $-|x| = x \leq |x|$.

Uit $-|x| \leq x = |x|$ en $-|x| = x \leq |x|$ tezamen volgt dat $-|x| \leq x \leq |x|$ voor alle x .

75. Eigenschap 6 (paragraaf 1.16) zegt: $|ab| = |a||b|$. Stel $b = \frac{1}{c}$, $c \neq 0$.

Als $c > 0$, dan is $\left| \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{c} = \frac{1}{|c|}$. Als $c < 0$, dan is $\left| \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{|c|}$.

Dus in het algemeen is $\left| \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{|c|}$.

Verder is $|a||b| = |a| \left| \frac{1}{c} \right| = |a| \frac{1}{|c|} = \frac{|a|}{|c|}$

En $|ab| = \left| a \cdot \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{a}{c} \right|$

Conclusie: $\left| \frac{a}{c} \right| = \frac{|a|}{|c|}$, ($c \neq 0$). Omdat c een willekeurig getal is mag je c door b vervangen.

76. Het rechter deel van eigenschap 5 (paragraaf 1.16) zegt: $x \leq |x|$.

Dus

$$a \leq |a|$$

$$b \leq |b|$$

Beide ongelijkheden bij elkaar optellen levert:

$$a + b \leq |a| + |b|$$

Het linker deel van eigenschap 5 zegt: $-|x| \leq x$. Dus $|x| \geq -x$, oftewel $-x \leq |x|$. In het bijzonder geldt: $-b \leq |b|$. Dit optellen bij de ongelijkheid $a \leq |a|$ levert $a - b \leq |a| + |b|$.

$$77. \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$78. \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{42}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{42}$$

$$79. \frac{7}{2 - \sqrt{13}} = \frac{7}{2 - \sqrt{13}} \cdot \frac{2 + \sqrt{13}}{2 + \sqrt{13}} = \frac{7(2 + \sqrt{13})}{4 - 13} = \frac{14 + 7\sqrt{13}}{-9}$$

$$80. \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$81. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$82. \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\ = \frac{-\sqrt{14} - \sqrt{21} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{7 - 5} = -\frac{1}{2}\sqrt{14} - \frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{15}$$

$$83. \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} - a}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a} - 1$$

$$84. \frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} \cdot \frac{1 + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + a}{1 - a}$$

$$85. \frac{19}{1 + \sqrt{20}} = \frac{19}{1 + \sqrt{20}} \cdot \frac{1 - \sqrt{20}}{1 - \sqrt{20}} = \frac{19 - 19\sqrt{20}}{1 - 20} = \frac{19 - 19\sqrt{20}}{-19} \\ = -1 + \sqrt{20} = \sqrt{20} - 1 = \sqrt{4 \cdot 5} - 1 = 2\sqrt{5} - 1$$

$$86. {}^2\log 64 = {}^2\log 2^6 = 6$$

$$87. {}^4\log 64 = {}^4\log 4^3 = 3$$

$$88. {}^8\log 64 = {}^8\log 8^2 = 2$$

$$89. {}^{16}\log 64 = {}^{16}\log(16 \cdot 4) = {}^{16}\log(16 \cdot 16^{\frac{1}{2}}) = {}^{16}\log 16^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$$

$$90. {}^2\log \frac{1}{2} = {}^2\log 2^{-1} = -1$$

$$91. {}^{10}\log 1000000 = {}^{10}\log 10^6 = 6$$

$$92. {}^3\log \frac{1}{9} = {}^3\log 3^{-2} = -2$$

$$93. {}^4\log 64^{-1} = {}^4\log (4^3)^{-1} = {}^4\log 4^{-3} = -3$$

$$94. {}^3\log \sqrt{3} = {}^3\log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$95. {}^3\log 1 = {}^3\log 3^0 = 0$$

$$96. {}^5\log \frac{1}{125} = {}^5\log 5^{-3} = -3$$

$$97. {}^3\log 3 = 1$$

$$98. {}^3\log \sqrt[4]{27} = {}^3\log (3^3)^{\frac{1}{4}} = {}^3\log 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$99. {}^p\log p^5 = 5$$

$$100. {}^p\log \frac{p^3}{\sqrt{p}} = {}^p\log \frac{p^3}{p^{\frac{1}{2}}} = {}^p\log p^{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}$$

$$101. {}^p\log \sqrt[3]{p^2} = {}^p\log (p^2)^{\frac{1}{3}} = {}^p\log p^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$102. 2^{2\log 3 - 2\log 5} = \frac{2^{2\log 3}}{2^{2\log 5}} = \frac{3}{5}$$

$$103. 5 \cdot {}^3\log 9 - 2 \cdot {}^2\log 16 = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 10 - 8 = 2$$

$$104. {}^2\log \frac{1}{8} \cdot {}^3\log 27 = -3 \cdot 3 = -9$$

$$105. 3^{7\log 1} \cdot {}^5\log 0.04 = 3^0 \cdot {}^5\log \frac{1}{25} = 1 \cdot -2 = -2$$

$$106. {}^p\log ({}^8\log g^p) = {}^p\log p = 1$$

$$107. 10^{(5 \cdot 10 \log 2)} = (10^{10 \log 2})^5 = 2^5 = 32$$

$$108. \log 2 = 0.3010$$

$$109. \log 20 = \log(10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0.3010 = 1.3010$$

$$110. {}^2\log 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2.3219$$

$$111. {}^3\log 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.4650$$

$$112. {}^4\log 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = 1.1610$$

$$113. {}^5\log 5 = 1$$

$$114. \log 2 \approx 0.301 \text{ en } \log 3 \approx 0.477, \text{ dus}$$

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0.301 + 0.477 = 0.778$$

$$\log 128 = \log 2^7 = 7 \cdot \log 2 \approx 7 \cdot 0.301 = 2.107$$

$$\log 108 = \log(4 \cdot 27) = \log(2^2 \cdot 3^3) = 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 \approx 2 \cdot 0.301 + 3 \cdot 0.477 = 2.033$$

$$\log \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{3} - \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 \approx \frac{1}{2} \cdot 0.477 - \frac{1}{2} \cdot 0.301 = 0.088$$

$$115. 5^x = 2, \text{ neem links en rechts de logaritme: } \log 5^x = \log 2, \text{ dus} \\ x \cdot \log 5 = \log 2, \text{ dus } x = \frac{\log 2}{\log 5} = 0.4307$$

$$116. 10^t = 5, \text{ dus } \log 10^t = \log 5, \text{ dus } t = \log 5 = 0.6990$$

$$117. 3^t = \frac{1}{2}, \text{ dus } \log 3^t = \log \frac{1}{2}, \text{ dus } t \cdot \log 3 = \log 2^{-1}, \text{ dus } t = -\frac{\log 2}{\log 3} = -0.6310$$

118. $4^x = 6$, dus $\log 4^x = \log 6$, dus $x = \frac{\log 6}{\log 4} = 1.2925$
119. $4^{x+1} = 8$, dus ${}^4\log 4^{x+1} = {}^4\log 8$, dus $x+1 = {}^4\log 8$, dus $x = -1 + {}^4\log(4 \cdot \sqrt{4}) = -1 + {}^4\log 4^{1\frac{1}{2}} = -1 + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
120. ${}^4\log 16 + {}^4\log x = 1$, dus $4 + {}^4\log x = 1$, dus ${}^4\log x = -3$, dus $x = 4^{-3} = \frac{1}{64}$
121. ${}^4\log(x+2) = 1$, dus $x+2 = 4^1$, dus $x = 2$
122. ${}^3\log(2x-3) = 4$, dus $2x-3 = 3^4$, dus $2x = 84$, dus $x = 42$
123. $1.08^x = 2$, dus $x = \frac{\log 2}{\log 1.08} \approx 9.0065$
124. $1.08^{-x} = 2$, dus $-x = {}^{1.08}\log 2$, dus (zie vorige opgave) $x \approx -9.0065$
125. ${}^2\log(3x+1) = 4$, dus $3x+1 = 2^4$, dus $3x = 15$, dus $x = 5$
126. ${}^3\log(1-2x) = \frac{1}{2}$, dus $1-2x = 3^{\frac{1}{2}}$, dus $2x = 1 - \sqrt{3}$, dus $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
127. ${}^x\log 16 = 2$, dus $16 = x^2$, dus $x = \pm 4$. maar $x = -4$ is geen oplossing omdat het grondtal positief moet zijn
128. $\log x = 5.1$, dus $x = 10^{5.1} \approx 125892$
129. $\log x^2 = 8$, dus $2 \cdot \log x = 8$, dus $\log x = 4$, dus $x = 10^4$
130. $7^{-x} = 15$, dus ${}^7\log 7^{-x} = {}^7\log 15$, dus $-x = {}^7\log 15$, dus $x = -\frac{\log 15}{\log 7} \approx 1.3917$
131. $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log x = {}^2\log 8$, dus ${}^3\log x = 2 \cdot 3$, dus $x = 3^6 = 729$
132. ${}^2\log x^{({}^2\log x)} = 4$. Uit stelling 1.32 volgt ${}^2\log x \cdot {}^2\log x = 4$, dus ${}^2\log x = \pm 2$, dus $x = 4 \vee x = \frac{1}{4}$
133. Het bewijs verloopt analoog aan dat van stelling 1.30. Stel $x = g^a$ en $y = g^b$, dan is ${}^s\log \frac{x}{y} = {}^s\log \frac{g^a}{g^b} = {}^s\log g^{a-b} = a-b$.
Verder volgt uit $x = g^a$ en $y = g^b$, dat ${}^s\log x = a$ en dat ${}^s\log y = b$. Dus ${}^s\log \frac{x}{y} = a-b = {}^s\log x - {}^s\log y$.
134. Stel $x = g^a$, dan is ${}^s\log x = a$.
 ${}^s\log x^p = {}^s\log (g^a)^p = {}^s\log g^{p \cdot a} = p \cdot a = p \cdot {}^s\log x$.
135. Stel $x = p^a$, dan is $a = {}^p\log x$.
Wat is ${}^s\log x$? ${}^s\log x = {}^s\log p^a = a \cdot {}^s\log p$. Dus ${}^s\log x = {}^p\log x \cdot {}^s\log p$
Conclusie: ${}^p\log x = \frac{1}{{}^s\log p} \cdot {}^s\log x$

Uitwerkingen hoofdstuk 2

1. $\sum_{i=1}^6 a_i b c^{2i}$
2. $\sum_{i=1}^{10} i = 55$
3. $\sum_{i=1}^3 i^2 = 1 + 4 + 9 = 14$
4. $\sum_{i=1}^5 i - \sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 0$
5. $\sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=6}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
6. $\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n \text{ keer}} = nc$
7. $\sum_{i=1}^n ca_i = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \sum_{i=1}^n a_i$
8. $\sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) =$
 $a_1 \pm b_1 + a_2 \pm b_2 + \dots + a_n \pm b_n = \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i)$
9. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \sum_{i=1}^6 2i - 1$
10. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = \sum_{i=1}^4 i(i+1)$
11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2^i}$
12. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \sum_{i=1}^6 (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
13. $\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=2}^{n-1} i = 1 + n$
14. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{2} - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{k}{2} = \frac{2n-1}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{4n-1}{2} = 2n - \frac{1}{2}$
15. $d[(3, -4), (0, 0)] = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$
16. $d\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right] = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)^2} =$
 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$
- 17.(a) Voor $n = 1$ geldt: $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ en $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Dus de

bewering klopt voor $n = 1$.

Stel nu dat de bewering $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ geldt voor zekere n .

Kun je dan bewijzen dat de bewering ook geldt voor $n + 1$?

Je moet dus bewijzen dat (vul in de bewering $n + 1$ voor n in):

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n 2^i &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n \stackrel{\text{inductie-onderstelling}}{=} (2^n - 1) + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

En daarmee is de bewering bewezen.

$$(b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \stackrel{\text{gelijknamig maken}}{=} \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1}{2^n} \stackrel{\text{onderdeel (a)}}{=} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

18. Voor $n = 0$ geldt: $0^2 + 0 = 0$ is even. Dus de bewering klopt voor $n = 0$.

Stel nu dat de bewering $n^2 + n$ is even geldt voor zekere n . Kun je dan bewijzen dat de bewering ook geldt voor $n + 1$?

Je moet dus bewijzen dat (vul in de bewering $n + 1$ voor n in):

$$(n + 1)^2 + (n + 1) \text{ is even.}$$

Bewijs:

$$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2(n + 1)$$

In de laatste uitdrukking is $n^2 + n$ even vanwege de inductie-onderstelling, en $2(n + 1)$ is even omdat het een tweevoud is.

Hiermee is het bewijs geleverd.

19. Voor $n = 1$ geldt: $\frac{x^1 - 1}{x - 1} = 1$ en $\sum_{i=0}^0 x^i = 1$. Dus de bewering klopt voor $n = 1$.

Stel nu dat de bewering $\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$ geldt voor zekere n . Kun je dan bewijzen dat de bewering ook geldt voor $n + 1$?

Je moet dus bewijzen dat (vul in de bewering $n + 1$ voor n in):

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^n x^i.$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x^i &= \sum_{i=0}^{n-1} x^i + x^n \stackrel{\text{inductie-onderstelling}}{=} \frac{x^n - 1}{x - 1} + x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} + \frac{x^n(x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{x^n - 1 + x^{n+1} - x^n}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

En daarmee is de bewering bewezen.

20. Neem in het binomium van Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, zie (2.5), $a = 1$ en $b = 1$. Je krijgt dan $(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$, oftewel $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

21. Neem in het binomium van Newton, zie 2.5, $a = 1$ en $b = -1$. Je krijgt dan $(1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$, oftewel $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
22. Uit 2.6 volgt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Dus
 $\binom{n}{1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}$,
 $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$, et cetera. Dus:
 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$
 Uit opgave 20 volgt dat $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$.
 Dus $\sum_{k \text{ oneven}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$
23. Uit opgave 20 volgt dat $\sum_{k \text{ oneven}}^n \binom{n}{k} + \sum_{k \text{ even}}^n \binom{n}{k} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$
 Uit opgave 22 volgt dat $\sum_{k \text{ oneven}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$
 Dus ook $\sum_{k \text{ even}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$
- 24.(a) Voor deze rekenkundige rij geldt: $a = 5$ en $v = -4$
 $t_{10} = a + 9v = 5 + 9 \cdot -4 = -31$
 (b) $t_n = a + (n-1)v = 5 + (n-1) \cdot -4 = 9 - 4n$
 (c) $t_1 = 5$, $t_{n+1} = t_n - 4$, $n \in \mathbb{N}^+$
 (d) $9 - 4n = -43$, dus $4n = 52$, dus $n = 13$
 (e) $s_n = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n) = \frac{1}{2}n(5 + 9 - 4n) = \frac{1}{2}n(14 - 4n)$
 (f) $s_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10(14 - 4 \cdot 10) = 5 \cdot -26 = -130$
 (g) Som van de tweede tien termen is $s_{20} - s_{10}$.
 $s_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20(14 - 4 \cdot 20) = -660$.
 De gevraagde som is dus $-660 - (-130) = -530$
 Alternatief: de som van de tweede tien termen is
 $\frac{1}{2} \cdot 10(t_{11} + t_{20}) = 5(-35 + -71) = 5 \cdot -106 = -530$
25. $\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.
 De getallen vormen een rekenkundige rij met $t_1 = 1$, $t_{10} = 10$ en $v = 1$. De som is $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{1}{2} \cdot 10(1 + 10) = 55$.
 Evenzo is $\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1}{2} \cdot 100(1 + 100) = 5050$,
 en $\sum_{k=1}^{1000} k = \frac{1}{2} \cdot 1000(1 + 1000) = 500500$.
26. De prijzen vormen een rekenkundige rij, met $p_6 = 80$ en $v = -8$.
 Dus $p_1 = 80 + 5 \cdot 8 = 120$. Dus $p_n = 120 + (n-1) \cdot -8 = 128 - 8n$.
 En dus is $p_{15} = 8$. De totale prijzenpot is $s_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15(p_1 + p_{15}) = \frac{1}{2} \cdot 15(120 + 8) = 960$.
27. Het is een meetkundige rij met $t_1 = 2$ en $r = 3$.
 (a) $t_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39366$
 (b) $t_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

- (c) $t_1 = 2, t_{n+1} = 3t_n$
- (d) $t_n = 118098$, dus $2 \cdot 3^{n-1} = 118098$, dus $3^{n-1} = 59049$.
 Neem links en rechts de $^{10}\log$: $^{10}\log 3^{n-1} = ^{10}\log 59049$, dus
 $n - 1 = \frac{^{10}\log 59049}{^{10}\log 3} = 10$, dus $n = 11$, dat wil zeggen
 $t_{11} = 118098$.
- (e) $s_n = 2 \cdot \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = -(1 - 3^n) = 3^n - 1$
- (f) $s_{10} = 3^{10} - 1 = 59048$

28. Het is een meetkundige rij met $t_1 = 1$ en $r = \frac{1}{2}$.

- (a) $t_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$
- (b) $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- (c) $t_1 = 1, t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n$
- (d) $s_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

29. De verschilrij is $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \dots$. Dit is een rekenkundige rij met $v_1 = 5$ en constant verschil van -1 . Een directe formule voor de verschilrij is $v_n = 5 + (n - 1) \cdot -1 = 6 - n$. Dus een indirecte formule voor de oorspronkelijke rij is

$$\begin{cases} t_1 = 10 \\ t_{n+1} = t_n + 6 - n \end{cases}$$

30. De verschilrij is $3, 6, 9, 12, 15, \dots$. Dit is een rekenkundige rij met $v_1 = 3$ en constant verschil van 3 . Een directe formule voor de verschilrij is $v_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$. Dus een indirecte formule voor de oorspronkelijke rij is

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_{n+1} = t_n + 3n \end{cases}$$

31. De verschilrij is $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$. Dit is een rij van kwadraten, dus $v_n = n^2$. Een indirecte formule voor de oorspronkelijke rij is

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_{n+1} = t_n + n^2 \end{cases}$$

32. De verschilrij is $3, 5, 7, 9, 11, \dots$, dit zijn opeenvolgende oneven getallen met $v_n = 2n + 1, n \geq 1$. Een recursieformule voor de oorspronkelijke rij is dus

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_{n+1} = t_n + 2n + 1 \end{cases}$$

33. $1011\ 0000 = 128 + 32 + 16 = 176$ en $1110\ 1100 = 128 + 64 + 32 + 8 + 4 = 236$

- 34.(a) $15 = 1111_2$ (d) $128 = 1000\,0000_2$
 (b) $16 = 1\,0000_2$ (e) $1023 = 11\,1111\,1111_2$
 (c) $127 = 111\,1111_2$ (f) $1024 = 100\,0000\,0000_2$

35.(a) $1111_2 = 15_{10}$. En $1111_2 + 1111_2 = 11110_2 = 30_{10}$

(b) $1001\,0011_2 = 147_{10}$ en $0101\,1011_2 = 91_{10}$
 $1001\,0011_2 + 0101\,1011_2 = 1110\,1110_2 = 238_{10}$

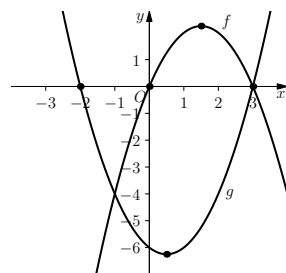
36. Stel $g = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$. Dan is $g = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \underbrace{111\dots 1_2}_{n \text{ enen}}$
 Als je 1 optelt bij dit binaire getal $111\dots 1$, krijg je $1\underbrace{000\dots 0}_{n \text{ nullen}}$, en
 dit is 2^n . Dus $g + 1 = 2^n$, oftewel $g = 2^n - 1$.

Uitwerkingen hoofdstuk 3

1. $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0$, dus $x = 3 \vee x = 4$.
2. $x^2 - 7x - 11 = 0$. De discriminant is $D = 49 - 4 \cdot -11 = 93$, dus $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{93}}{2}$.
3. $x^2 + x + 3 = 0$. De discriminant is $D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0$. Er zijn geen oplossingen.
4. $x^2 - 14x - 15 = (x - 15)(x + 1) = 0$. Dus $x = -1 \vee x = 15$.
5. $-ax^2 + bx = -a - b \Leftrightarrow ax^2 - bx - (a + b) = 0$.
 $D = b^2 - 4a \cdot -(a + b) = b^2 + 4a^2 + 4ab = (2a + b)^2$. Dus
 $x_{1,2} = \frac{b \pm (2a + b)}{2a}$, $x_1 = \frac{b + 2a + b}{2a} = \frac{a + b}{a}$ en $x_2 = \frac{b - 2a - b}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$.
6. Gegeven is $x^2 + 2x - p + 1 = 0$, $p \in \mathbb{R}$.
 (a) Twee oplossingen als $D = 4 - 4(-p + 1) = 4p > 0$, dus als $p > 0$.
 (b) Eén oplossing als $D = 0$, dus als $p = 0$.
 (c) Geen oplossingen als $D < 0$, dus als $p < 0$.
7. $x = \frac{1}{x}$. Er moet gelden $x \neq 0$. $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.
8. $x + 2 = \frac{1}{x + 2}$. ($x \neq -2$), dus $(x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 1$, dus $x = -1 \vee x = -3$.
9. $x + 2 = \frac{1}{x - 2}$. ($x \neq 2$), dus $(x + 2)(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 5$, dus $x = \pm \sqrt{5}$.
10. $\frac{x + 2}{x - 2} = \frac{x - 2}{x + 2}$. ($x \neq \pm 2$), dus $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 8x = 0$, dus $x = 0$.
11. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 6} = 1$. ($x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) \neq 0$, dus $x \neq 3 \wedge x \neq -2$). $x^2 + 2x - 3 = x^2 - x - 6 \Leftrightarrow 3x = -3$, dus $x = -1$.
12. $\frac{2x^2}{x^2 - 4} = 2$. ($x \neq \pm 2$), dus $\frac{x^2}{x^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow 0 = 4$, dus geen oplossingen.
13. $\frac{x^2}{x - 3} = \frac{-x + 12}{x - 3}$. ($x \neq 3$), dus $x^2 = -x + 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 4) = 0$, dus $x = 3 \vee x = -4$, maar $x = 3$ is niet toegestaan, dus $x = -4$ is de enige oplossing.

14. $y = 2(x+6)^2 + 1 = 2(x^2 + 12x + 36) + 1 = 2x^2 + 24x + 73$
15. $y = 2(x-3)(x+7) = 2(x^2 + 4x - 21) = 2x^2 + 8x - 42$
16. $y = \frac{2}{3}(x-5)^2 - 10 = \frac{2}{3}(x^2 - 10x + 25) - 10$
 $= \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{50}{3} - 10 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{20}{3}$
17. $y = -\frac{2}{5}(x + \frac{1}{2})(x+8) = -\frac{2}{5}(x^2 + \frac{17}{2}x + 4) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{17}{5}x - \frac{8}{5}$
18. $y = -4(x+8)^2 + 15 = -4(x^2 + 16x + 64) + 15 = -4x^2 - 64x - 241$
19. $y = \sqrt{5}(x+\pi)(x-\sqrt{2}) = \sqrt{5} \left[x^2 + (\pi - \sqrt{2})x - \pi\sqrt{2} \right]$
 $= \sqrt{5}x^2 + (\pi\sqrt{5} - \sqrt{10})x - \pi\sqrt{10}$
20. $y = -3 + 2x + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 3 = x^2 - 2$
21. $y = -(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{2}$
22. $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$
23. $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$
24. $\frac{1}{2}x^2 - 3x = \frac{1}{2}[x^2 - 6x] = \frac{1}{2}[(x-3)^2 - 9] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{9}{2}$
25. $3x^2 - 6x = 3[x^2 - 2x] = 3[(x-1)^2 - 1] = 3(x-1)^2 - 3$
26. $y = 4x^2 - 40x + 3 = 4[x^2 - 10x] + 3 = 4[(x-5)^2 - 25] + 3 =$
 $4(x-5)^2 - 100 + 3 = 4(x-5)^2 - 97$
27. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{2}[x^2 + 6x] - 2 = \frac{1}{2}[(x+3)^2 - 9] - 2 =$
 $\frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{13}{2}$
28. $y = -\frac{3}{5}x^2 - 6x + 7 = -\frac{3}{5}[x^2 + 10x] + 7 = -\frac{3}{5}[(x+5)^2 - 25] +$
 $7 = -\frac{3}{5}(x+5)^2 + 15 + 7 = -\frac{3}{5}(x+5)^2 + 22$
29. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 4$. Deze uitdrukking is al in de topvorm.
30. De grafiek van de tweedegraads functie f snijdt de x -as in $x = 0$ en $x = 4$. Vanwege deze nulpunten heeft het functievoorschrift de vorm $f(x) = ax(x-4)$. De top bevindt zich precies tussen de nulpunten, dus bij $x = 2$, dat wil zeggen: $f(2) = 4$. Invullen in het functievoorschrift levert: $f(2) = 2a(2-4) = 4$, dus $-4a = 4$, oftewel $a = -1$. Het functievoorschrift is dus $f(x) = -x(x-4)$.
31. De grafiek van de tweedegraads functie f snijdt de x -as in $x = -2$ en $x = 6$. Vanwege deze nulpunten heeft het functievoorschrift de vorm $f(x) = a(x+2)(x-6)$. De top bevindt zich precies tussen de nulpunten, dus bij $x = 2$, dat wil zeggen: $f(2) = -4$. Invullen in het functievoorschrift levert: $f(2) = a(2+2)(2-6) = -4$, dus $-16a = -4$, oftewel $a = \frac{1}{4}$. Het functievoorschrift is dus $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-6)$.

32. De parabool heeft top $T(3, -6)$, dus het functievoorschrift heeft de vorm $f(x) = a(x - 3)^2 - 6$. Omdat $S(\frac{2}{3}, -4)$ een punt van de grafiek is, geldt $f(\frac{2}{3}) = -4$. Dus $a(\frac{2}{3} - 3)^2 - 6 = -4$. Dus $\frac{49}{9}a = 2$, dus $a = \frac{18}{49}$. Het functievoorschrift is dus $f(x) = \frac{18}{49}(x - 3)^2 - 6$.
33. Vanwege de nulpunten bij $x = 2\frac{1}{2}$ en $x = 4$ heeft de parabool vergelijking $y = a(x - \frac{5}{2})(x - 4)$. Coördinaten van $C(-3\frac{2}{5}, 8)$ oftewel $C(-\frac{17}{5}, 8)$ invullen levert $a(-\frac{17}{5} - \frac{5}{2})(-\frac{17}{5} - 4) = 8$, dus $a(-\frac{59}{10})(-\frac{37}{5}) = 8$, dus $\frac{2183}{50}a = 8$ en dus $a = \frac{400}{2183}$. De vergelijking is $y = \frac{400}{2183}(x - 2\frac{1}{2})(x - 4)$.
34. $f(x) = x^2 - 6x + p = (x - 3)^2 - 9 + p$. Vanwege de top is $-9 + p = -5$. Dus $p = 4$.
35. $f(x) = x^2 - px + 6 = (x - \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + 6$. Vanwege de top is $-\frac{p^2}{4} + 6 = 5$, dus $-\frac{p^2}{4} = -1$, oftewel $p^2 = 4$, dus $p = 2 \vee p = -2$.
36. Gegeven zijn $f(x) = -x^2 + 3x$ en $g(x) = x^2 - x - 6$.
- (a) Snijpunten van f en g : $f(x) = g(x)$, dus $-x^2 + 3x = x^2 - x - 6$, dus $2x^2 - 4x - 6 = 0$, oftewel $x^2 - 2x - 3 = 0$, dus $(x - 3)(x + 1) = 0$, dus $x = -1 \vee x = 3$. Invullen in $f(x)$ en $g(x)$ (dit laatste ter controle): $f(-1) = -1 - 3 = -4$ en $g(-1) = 1 + 1 - 6 = -4$. Dus $(-1, -4)$ is het eerste snijpunt. $f(3) = -9 + 9 = 0$ en $g(3) = 9 - 3 - 6 = 0$. Dus $(3, 0)$ is het tweede snijpunt.
- (b) Nulpunten: $f(x) = -x^2 + 3x = 0$, dus $-x(x - 3) = 0$, dus $x = 0 \vee x = 3$ (dat $x = 3$ een nulpunt is, wisten we al uit onderdeel a). Voor $g(x)$ geldt: $x^2 - x - 6 = 0$, dus $(x - 3)(x + 2) = 0$, dus $x = -2 \vee x = 3$.
- (c) De top van f : midden tussen de nulpunten 0 en 3, dus bij $x = 1\frac{1}{2}$, $f(1\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Alternatief: breng $f(x)$ in topvorm: $-x^2 + 3x = -[x^2 - 3x] = -[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$.
- De top van g : midden tussen de nulpunten -2 en 3 , dus bij $x = \frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -6\frac{1}{4}$. Alternatief: breng $g(x)$ in topvorm: $x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}$.
- (d) Zie figuur 11.1.



Figuur 11.1: $f(x) = -x^2 + 3x$ en $g(x) = x^2 - x - 6$

37. $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4) = 0$, dus $x = -2 \vee x = -4$.
38. $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5) = 0$, dus $x = -1 \vee x = -5$.
39. $x^2 + 6x - 7 = (x + 7)(x - 1) = 0$, dus $x = -7 \vee x = 1$.
40. $x^2 - 12x - 13 = (x - 13)(x + 1) = 0$, dus $x = -1 \vee x = 13$.
41. $x^2 + 12x - 13 = (x + 13)(x - 1) = 0$, dus $x = 1 \vee x = -13$.
42. $x^2 - 42x - 1159 = (x - 61)(x + 19) = 0$, dus $x = 61 \vee x = -19$.
43. $8x^2 + 6x + 1 = (4x + 1)(2x + 1) = 0$, dus $x = -\frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{2}$.
44. $5x^2 + 6x + 1 = (x + 1)(5x + 1) = 0$, dus $x = -1 \vee x = -\frac{1}{5}$.
45. $-7x^2 + 6x + 1 = (-x + 1)(7x + 1) = 0$, dus $x = 1 \vee x = -\frac{1}{7}$.
46. $-13x^2 - 12x + 1 = (-13x + 1)(x + 1) = 0$, dus $x = \frac{1}{13} \vee x = -1$.
47. $-13x^2 + 12x + 1 = (13x + 1)(-x + 1) = 0$, dus $x = -\frac{1}{13} \vee x = 1$.
48. $-1159x^2 - 42x + 1 = (-61x + 1)(19x + 1) = 0$, dus $x = \frac{1}{61} \vee x = -\frac{1}{19}$.

Opmerking bij opgave 42: typ in wolframalpha.com de waarde 1159 in, en kijk bij Prime Factorization.

49. $\frac{x-a}{x+a} = \frac{2a-x}{2a+x}$. Er moet gelden: $x-a \neq 0$ en $2a+x \neq 0$, dus $x \neq -a$ en $x \neq -2a$. Uit de gegeven vergelijking volgt:
 $(x-a)(2a+x) = (2a-x)(x+a)$, dus $2ax + x^2 - 2a^2 - ax = 2ax + 2a^2 - x^2 - ax$, dus $x^2 - 2a^2 = 2a^2 - x^2$, dus $2x^2 = 4a^2$, dus $x^2 = 2a^2$, dus $x = \pm\sqrt{2a^2} = \pm|a|\sqrt{2} = \pm a\sqrt{2}$
 Vanwege $\pm$ kun je de absoluutstrepen weglaten.

$\sqrt{a^2} = |a|$, zie paragraaf 1.19.

50. Los op: $(x^2 - 4x - 11)(x^2 - 4x + 2) = 14$. Stel $t = x^2 - 4x - 11$, dan is $t + 13 = x^2 - 4x + 2$. De vergelijking wordt dus:
 $t(t + 13) = 14$, dus $t^2 + 13t - 14 = 0$, dus $(t - 1)(t + 14) = 0$, dus $t = 1 \vee t = -14$.
 Dus a. $x^2 - 4x - 11 = 1$, dus $x^2 - 4x - 12 = 0$, dus $(x - 6)(x + 2) = 0$, dus $x = 6 \vee x = -2$.
 En b. $x^2 - 4x - 11 = -14$, dus $x^2 - 4x + 3 = 0$, dus $(x - 1)(x - 3) = 0$, dus $x = 1 \vee x = 3$.
 Er zijn dus vier oplossingen: $x = 6 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$.
51. Los op: $\sqrt{x^2 - 12x + 51} + (x - 6)^2 = 5$. De wortel kun je schrijven als $\sqrt{(x - 6)^2 + 15}$. Merk op dat $(x - 6)^2 + 15 > 0$ voor alle x , dus de wortel legt (in dit geval) geen beperkingen op. Stel $t = (x - 6)^2$. Dan wordt de vergelijking: $\sqrt{t + 15} = 5 - t$, dus $t + 15 = t^2 - 10t + 25$, oftewel $t^2 - 11t + 10 = 0$, dus $(t - 1)(t - 10) = 0$, dus $t = 1 \vee t = 10$.
 $t = (x - 6)^2$ invullen:
 $(x - 6)^2 = 1$, dus $x - 6 = \pm 1$, dus $x = 5 \vee x = 7$.
 $(x - 6)^2 = 10$, dus $x - 6 = \pm\sqrt{10}$, dus $x = 6 \pm \sqrt{10}$.
 Er zijn dus vier oplossingen: $x = 5 \vee x = 7 \vee x = 6 + \sqrt{10} \vee x = 6 - \sqrt{10}$.
52. Er geldt: $t_1 = 2$ en $t_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 2$. Voor de som van de eerste n termen geldt: $338 = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n)$. Dus $\frac{1}{2}n(2 + 4n - 2) = 338$, oftewel $2n^2 = 338$, dus $n^2 = 169$, dus

$n = \pm 13$. Omdat n positief moet zijn, is $n = 13$ de oplossing.

53. $t_1 = 100, t_2 = 110, t_3 = 120$: een rekenkundige rij met $v = 10$.

Dus $t_n = t_1 + (n-1)v = 100 + (n-1)10 = 90 + 10n$. En dus

is $s_n = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n) = \frac{1}{2}n(100 + 90 + 10n) = \frac{1}{2}n(190 + 10n)$.

Er moet gelden: $s_n = 22000$, dus $\frac{1}{2}n(190 + 10n) = 22000$, of

$5n^2 + 95n - 22000 = 0$, of $n^2 + 19n - 4400 = 0$.

Dus $n = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot -4400}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{17961}}{2}$.

Alleen de positieve oplossing voldoet: $n \approx 57.509$. Dus na 58 maanden is de schuld afgelost.

54. ${}^3\log x + {}^3\log(2x+1) = 1$, dus (zie stelling 1.30) ${}^3\log x(2x+1) = 1$,
dus $x(2x+1) = 3$, dus $2x^2 + 2x - 3 = 0$, dus $(x-1)(2x+3) = 0$,
dus $x = 1 \vee x = -\frac{3}{2}$. De oplossing $x = -\frac{3}{2}$ vervalt omdat voor die
waarde ${}^3\log x$ niet bestaat.

55. $\log \frac{x^2}{1-x} = \log x + \log \frac{2x}{1+x}$, dus $\log \frac{x^2}{1-x} = \log(x \cdot \frac{2x}{1+x})$,

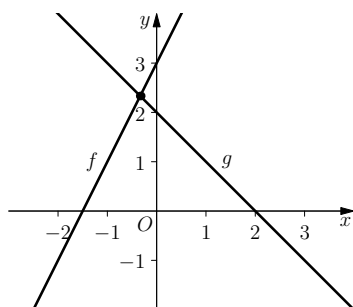
dus $\frac{x^2}{1-x} = \frac{2x^2}{1+x}$, dus $x^2(1+x) = 2x^2(1-x)$,

dus $2x^2(1-x) - x^2(1+x) = 0$, dus $x^2[2(1-x) - (1+x)] = 0$,

dus $x^2[1-3x] = 0$, dus $x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$.

De oplossing $x = 0$ vervalt omdat $\log 0$ niet bestaat.

- 56.(a) Zie figuur 11.2.



Figuur 11.2: $f(x) = 2x + 3$ en
 $g(x) = -x + 2$

- (b) Snijpunt: los $f(x) = g(x)$ op, dus $2x + 3 = -x + 2$, dus
 $3x = -1$, oftewel $x = -\frac{1}{3}$. Invullen in $f(x)$ en (ter controle) in
 $g(x)$: $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} + 3 = 2\frac{1}{3}$. En $g(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}$. Dus
het snijpunt is $(-\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.

57. De richtingscoëfficiënt van l (zie paragraaf 3.13) is gelijk aan

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-8)}{3 - (-2)} = \frac{15}{5} = 3$$

A is een punt van de lijn, dus de vergelijking van l is (zie vergelijking 3.9): $y - (-8) = 3(x - (-2))$.

Oftewel $y + 8 = 3(x + 2)$, dus $y = 3x - 2$.

In plaats van A had je ook B kunnen nemen: de vergelijking van l wordt dan: $y - 7 = 3(x - 3)$. Dit levert eveneens $y = 3x - 2$.

58. $m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2 - 5}{-1 - 3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Met punt C wordt de vergelijking van de lijn: $y - 5 = \frac{3}{4}(x - 3)$,
oftewel $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

$$59. m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{1 - 3}{7 - 0} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}.$$

Met punt E of F wordt de vergelijking van de lijn: $y = -\frac{2}{7}x + 3$.

60. Als je inzielt dat de punten G en H dezelfde y -waarde hebben, volgt dat de lijn horizontaal loopt. De vergelijking van de lijn: $y = 3$.

$$\text{Andere methode: } m = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{3 - 3}{3 - (-2)} = 0.$$

Met (bijvoorbeeld) punt H volgt: $y - 3 = 0(x - 3)$, dus $y = 3$.

$$61. m = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{2 - 20}{1 - 10} = \frac{-18}{-9} = 2.$$

Met punt J wordt de vergelijking van de lijn: $y - 2 = 2(x - 1)$,
oftewel $y = 2x$.

62. Als je inzielt dat de punten I en K dezelfde x -waarde hebben, volgt dat de lijn verticaal loopt. De vergelijking van de lijn: $x = 10$.

$$\text{Andere methode: } m = \frac{y_K - y_I}{x_K - x_I} = \frac{0 - 20}{10 - 10} = \frac{-20}{0}.$$

De richtingscoëfficiënt bestaat dus niet. Dat duidt erop dat de lijn verticaal loopt. Uit de ligging van de punten volgt de vergelijking: $x = 10$.

- 63.(a) Lijn l is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -2x + 7$, dus de rico van l is -2 . Bovendien gaat l door $P(-1, 3)$, dus de vergelijking van l is $y - 3 = -2(x + 1)$, oftewel $y = -2x + 1$.

(b) $-2x + 1 = 0$, dus bij $x = \frac{1}{2}$ is het snijpunt van l met de x -as.

- 64.(a) $y + 3 = 3(x + 2)$, dus $y = 3x + 3$.

(b) De richtingscoëfficiënt van l is $m = \frac{1+3}{3+2} = \frac{4}{5}$. Dus de vergelijking van l is $y + 3 = \frac{4}{5}(x + 2)$, oftewel $y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$.

(c) De x -as heeft richtingscoëfficiënt 0, dus l heeft vergelijking $y = -3$.

(d) $x = -2$.

(e) $y + 3 = \frac{1}{2}(x + 2)$, dus $y = \frac{1}{2}x - 2$.

$$65. \quad x^2 + 2x - 1 \quad / \quad x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 1 \quad \backslash \quad x^2 + x + 3$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - x^2 \\ \hline x^3 + 5x^2 + 6x \\ \hline x^3 + 2x^2 - x \\ \hline 3x^2 + 7x + 1 \\ \hline 3x^2 + 6x - 3 \\ \hline x + 4 \end{array}$$

$$\text{Dus } \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2x - 1} = x^2 + x + 3 + \frac{x + 4}{x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{array}{r}
 66. \quad x^2 - 2 \mid x^4 + x^2 + 6x + 9 \quad \backslash \quad x^2 + 3 \\
 \underline{x^4 - 2x^2} \\
 3x^2 + 6x + 9 \\
 \underline{3x^2 - 6} \\
 6x + 15
 \end{array}$$

$$\text{Dus } \frac{x^4 + x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2} = x^2 + 3 + \frac{6x + 15}{x^2 - 2}$$

67.

$$\begin{array}{r}
 x=2 \quad 1 \quad -14 \quad 51 \quad -54 \\
 \quad 2 \quad -24 \quad 54 \\
 \quad 1 \quad -12 \quad 27 \quad 0
 \end{array}$$

Synthetisch delen eindigt op nul, dus is $x = 2$ een nulpunt, en er geldt $x^3 - 14x^2 + 51x - 54 = (x - 2)(x^2 - 12x + 27)$. De laatste uitdrukking kun je nog ontbinden in $(x - 3)(x - 9)$, dus $x^3 - 14x^2 + 51x - 54 = (x - 2)(x - 3)(x - 9)$.

68.

$$\begin{array}{r}
 x=4 \quad 9 \quad -30 \quad -23 \quad -4 \\
 \quad 36 \quad 24 \quad 4 \\
 \quad 9 \quad 6 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Synthetisch delen eindigt op nul, dus is $x = 4$ een nulpunt, en er geldt $9x^3 - 30x^2 - 23x - 4 = (x - 4)(9x^2 + 6x + 1)$. De laatste uitdrukking kun je nog ontbinden in $(3x + 1)(3x + 1)$, dus $x^3 - 14x^2 + 51x - 54 = (x - 4)(3x + 1)^2$.

69.

$$\begin{array}{r}
 x=5 \quad 4 \quad -8 \quad -51 \quad -43 \quad -10 \\
 \quad 20 \quad 60 \quad 45 \quad 10 \\
 \quad 4 \quad 12 \quad 9 \quad 2 \quad 0
 \end{array}$$

Dit eindigt op nul, dus $4x^4 - 8x^3 - 51x^2 - 43x - 10 = (x - 5)(4x^3 + 12x^2 + 9x + 2)$. Opnieuw synthetisch delen met de laatste factor en $x = -2$:

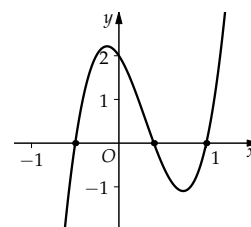
$$\begin{array}{r}
 x=-2 \quad 4 \quad 12 \quad 9 \quad 2 \\
 \quad -8 \quad -8 \quad -2 \\
 \quad 4 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Dus $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2 = (x + 2)(4x^2 + 4x + 1)$. De laatste factor kun je nog ontbinden in $(2x + 1)(2x + 1)$. Dus $4x^4 - 8x^3 - 51x^2 - 43x - 10 = (x - 5)(x + 2)(2x + 1)^2$.

70. Delers van de constante term zijn ± 1 en ± 2 . Delers van de kopcoëfficiënt zijn $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ en ± 10 . Mogelijke rationale nulpunten zijn dus: $\pm 2, \pm 1 \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{2}$ en $\pm \frac{1}{10}$. Een grafiek van de functie zie je in figuur 11.3.

Kijkend naar de grafiek, lijkt het erop alsof de nulpunten zich bij $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ en 1 bevinden. Controle:

$$\begin{array}{r}
 x = -1/2 \quad 10 \quad -9 \quad -3 \quad 2 \\
 \quad -5 \quad 7 \quad -2 \\
 \quad 10 \quad -14 \quad 4 \quad 0
 \end{array}$$



Figuur 11.3: Afbeelding bij opgave 70

Hieruit volgt dat $x = -\frac{1}{2}$ inderdaad een nulpunt is, en dat $f(x) = 10x^3 - 9x^2 - 3x + 2 = (x + \frac{1}{2})(10x^2 - 14x + 4)$.

Oftewel $f(x) = (2x + 1)(5x^2 - 7x + 2)$.

Controleer nu of $x = \frac{2}{5}$ een nulpunt is van de laatste factor:

$$\begin{array}{rrrr} x = 2/5 & 5 & -7 & 2 \\ & & 2 & -2 \\ & 5 & -5 & 0 \end{array}$$

Dus $x = \frac{2}{5}$ is een nulpunt, en $5x^2 - 7x + 2 = (x - \frac{2}{5})(5x - 5)$. De laatste factor heeft $x = 1$ als nulpunt, dus inderdaad bevinden de nulpunten zich bij $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ en 1 .

Er geldt: $f(x) = (x - 1)(x - \frac{2}{5})(5x - 5) = (x - 1)(5x - 2)(x - 1)$.

71. Delers van de constante term zijn ± 1 , ± 2 , ± 7 en ± 14 . Delers van de kopcoëfficiënt zijn ± 1 , ± 3 , ± 7 , ± 9 , ± 21 en ± 63 . Mogelijke rationale nulpunten zijn dus:

$$\begin{array}{cccc} \pm 1 & \pm 2 & \pm 7 & \pm 14 \\ \pm \frac{1}{3} & \pm \frac{2}{3} & \pm 2\frac{1}{3} & \pm 4\frac{2}{3} \\ \pm \frac{1}{7} & \pm \frac{2}{7} & (\pm 1) & (\pm 2) \\ \pm \frac{1}{9} & \pm \frac{2}{9} & \pm \frac{7}{9} & \pm 1\frac{5}{9} \\ \pm \frac{1}{63} & \pm \frac{2}{63} & (\pm \frac{1}{9}) & (\pm \frac{2}{9}) \end{array}$$

Een stukje van de grafiek van de functie zie je in figuur 11.4.

Er zijn twee nulpunten tussen 0 en 1, maar ook erg veel opties voor deze nulpunten. Voor het nulpunt links van -2 komt $x = -2\frac{1}{3}$ in aanmerking. Controle:

$$\begin{array}{rrrr} x = -7/3 & 63 & 96 & -113 & 14 \\ & & -147 & 119 & -14 \\ & 63 & -51 & 6 & 0 \end{array}$$

Hieruit volgt dat $x = -2\frac{1}{3}$ inderdaad een nulpunt is, en dat $f(x) = 63x^3 + 96x^2 - 113x + 14 = (x + 2\frac{1}{3})(63x^2 - 51x + 6)$.

Oftewel $f(x) = (3x + 7)(21x^2 - 17x + 2)$.

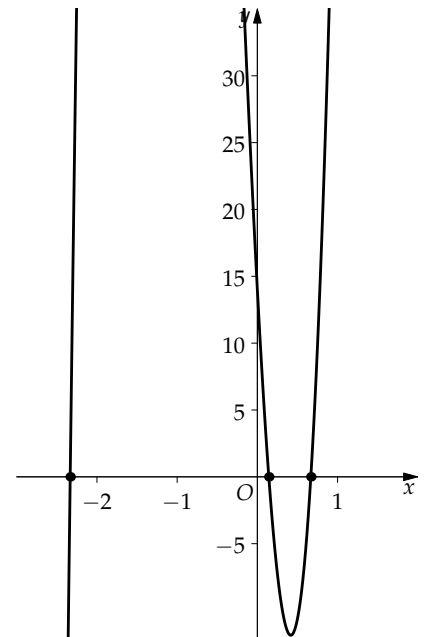
Mogelijke rationale nulpunten van de laatste factor die tussen 0 en 1 liggen zijn $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$ en $\frac{2}{21}$. Probeer $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{array}{rrrr} x = \frac{2}{3} & 21 & -17 & 2 \\ & & 14 & -2 \\ & 21 & -3 & 0 \end{array}$$

Dus $21x^2 - 17x + 2 = (x - \frac{2}{3})(21x - 3) = (3x - 2)(7x - 1)$.

Samenvattend: $f(x) = (3x + 7)(3x - 2)(7x - 1)$.

Alternatief is dat je de nulpunten van $21x^2 - 17x + 2$ bepaalt met de abc-formule: $x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 21 \cdot 2}}{42} = \frac{17 \pm 11}{42}$, dus $x_1 = \frac{2}{3}$ en $x_2 = \frac{1}{7}$.



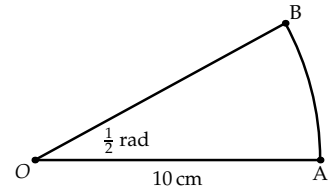
Figuur 11.4: Afbeelding bij opgave 71

Uitwerkingen hoofdstuk 4

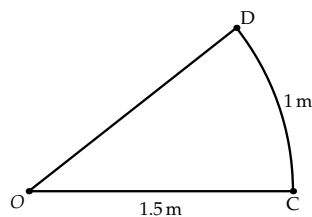
1. Zie figuur 12.1. De lengte van boog AB is $\alpha r = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

2. Zie figuur 12.2. De lengte van boog CD is $\alpha \cdot r = 1 \text{ m}$.

$$\text{Dus } \alpha = \frac{1 \text{ m}}{r} = \frac{1 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = \frac{2}{3} \text{ rad}$$



Figuur 12.1: Afbeelding bij opgave 1



Figuur 12.2: Hoek bepalen met straal en booglengte

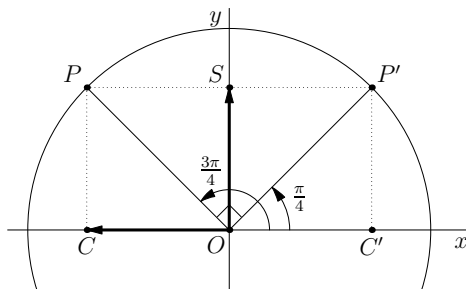
- | | |
|--|--|
| 3. $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$ | 7. $\frac{1}{2} \pi \text{ rad} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ |
| 4. $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 114.6^\circ$ | 8. $\frac{1}{4} \pi \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$ |
| 5. $\pi \text{ rad} = \pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ$ | 9. $\frac{2}{3} \pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$ |
| 6. $2\pi \text{ rad} = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ | 10. $\frac{5}{6} \pi \text{ rad} = \frac{5}{6} \cdot 180^\circ = 150^\circ$ |
| 11. $36^\circ = 36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$ | 13. $135^\circ = 135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ |
| 12. $270^\circ = 270^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ | 14. $150^\circ = 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ |

15. Zie figuur 12.3. $\triangle OPC$ is congruent met $\triangle OP'C'$.

$$\text{Dus } \sin \frac{3\pi}{4} = OS = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ en}$$

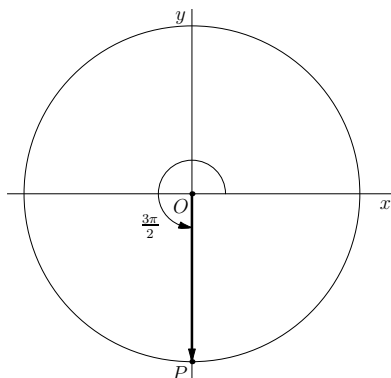
$$\cos \frac{3\pi}{4} = OC = -OC' = \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } \tan \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = -1$$



Figuur 12.3: Van sommige goniometrische verhoudingen zijn de waarden makkelijk af te lezen in de eenheidscirkel

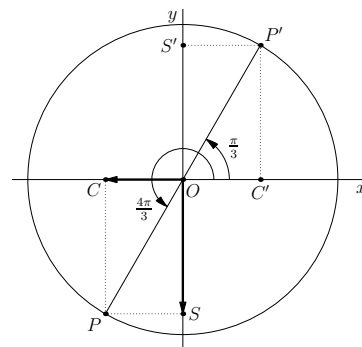
16. In figuur 12.4 lees je af dat $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ en $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, dus $\tan \frac{3\pi}{2}$ bestaat niet.

Figuur 12.4: Een hoek van $\frac{3\pi}{2}$ rad

17. In figuur 12.5 is $\triangle OPC$ congruent met $\triangle OP'C'$, en dus is

$$\sin \frac{4\pi}{3} = OS = -OS' = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = OC = -OC' = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \text{ dus } \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$$



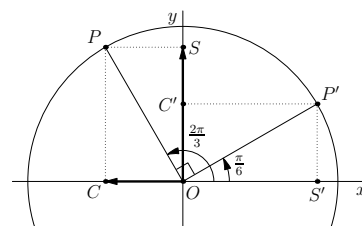
Figuur 12.5: Afbeelding bij opgave 17

18. Zie figuur 12.6. $\triangle OPS$ is congruent met $\triangle OP'S'$.

$$\text{Dus } \sin \frac{2\pi}{3} = OS = OS' = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = OC = -OC' = \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dus } \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$



Figuur 12.6: Afbeelding bij opgave 18

19. Uit de grafiek van de sinus lees je af: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
20. De grafiek van $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ krijg je door die van $y = \sin x$ over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links te verschuiven (en hij valt dan samen met de grafiek van de cosinus). De nulpunten zijn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
21. De grafiek van $y = 1 + \sin x$ krijg je door die van $y = \sin x$ over een afstand 1 omhoog te verschuiven. De minima van $y = \sin x$ worden de nieuwe nulpunten. Dus $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
22. De grafiek van $y = 1 + \cos x$ krijg je door die van $y = \cos x$ over een afstand 1 omhoog te verschuiven. De minima van $y = \cos x$ worden de nieuwe nulpunten. Dus $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
23. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin \frac{\pi}{2} \cos(-x) - \cos \frac{\pi}{2} \sin(-x) = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot -\sin x = \cos x$
24. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$
25. $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$
26. $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$
 $= \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \sin^2 \alpha = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$

$$\begin{aligned}
27. \quad \sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x &= \sin x(2 \sin x \cos x) + \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= 2 \sin^2 x \cos x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x \\
&= \sin^2 x \cos x + \cos^3 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
28. \quad \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\
&= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta
\end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x
\end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \\
&= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x
\end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha} = (\text{deel teller en noemer door } \cos \beta) \\
&= \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos \alpha}{\sin \alpha - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos \alpha} = (\text{deel teller en noemer door } \cos \alpha) \\
&= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}
\end{aligned}$$

32. Vooraf:

(a) Wegens goniometrische eigenschap 15 geldt: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
dus $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$

(b) Wegens goniometrische eigenschap 16b geldt: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$,
dus $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ en dus $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$.

Dit toepassen levert:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \tan \frac{1}{2}\alpha$$

33. Vooraf: Stel $\sin^2 \alpha = x$. Dan is $\sin^6 \alpha = x^3$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - x$, en $\cos^6 \alpha = (1 - x)^3$.

$$\begin{aligned}
\text{Dus } \sin^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^6 \alpha &= x^3 + 3x(1 - x) + (1 - x)^3 = \\
&= x^3 + 3x - 3x^2 + (1 - 3x + 3x^2 - x^3) = 1
\end{aligned}$$

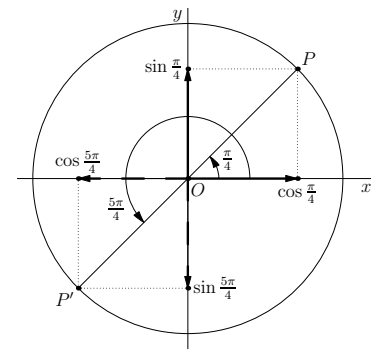
34. De coördinaten van A zijn (zie figuur 4.25): $x_A = b \cos \gamma$ en $y_A = b \sin \gamma$. De afstandsformule 2.2 geeft:

$$\begin{aligned} c = d(A, B) &= \sqrt{(a - b \cos \gamma)^2 + (0 - b \sin \gamma)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma} = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2(\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma)} \\ &= \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cdot 1} \end{aligned}$$

Links en rechts kwadrateren levert de cosinusregel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

35. Formule 16 in paragraaf 4.13 zegt: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Dus uit $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$ volgt $\cos^2 x - \sin^2 x = 2(\cos x - \sin x)$. Ofwel $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos x - \sin x)$. Dus $\cos x + \sin x = 2 \vee \cos x - \sin x = 0$. De vergelijking $\cos x + \sin x = 2$ heeft geen oplossingen (als dat wel het geval was, zouden $\cos x$ en $\sin x$ bij dezelfde x de waarde 1 moeten hebben). De oplossing van $\cos x - \sin x = 0$ oftewel $\sin x = \cos x$ is $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zie figuur 12.7.



Figuur 12.7: Afbeelding bij opgave 35

- 36.(a) Wegens formule 17 in paragraaf 4.13 is

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\text{Dus } \tan x = \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 - t^2}, \text{ met } t = \tan \frac{1}{2}x.$$

- (b) Wegens formule 15 in paragraaf 4.13 is

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

Deel teller en noemer door $\cos^2 x$:

$$\sin 2x = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Dus } \sin x = \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 + t^2}, \text{ met } t = \tan \frac{1}{2}x.$$

- (c) Wegens formule 16 in paragraaf 4.13 is

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

Deel teller en noemer door $\cos^2 x$:

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Dus } \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \text{ met } t = \tan \frac{1}{2}x.$$

37.(a) $f(g(1)) = 1$

(d) $g(f(3)) = \sqrt{15}$

(b) $g(f(1)) = \sqrt{3}$

(e) $f(g(x)) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$

(c) $f(g(3)) = \sqrt{8} + 1 = 1 + 2\sqrt{2}$

(f) $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 2x}$

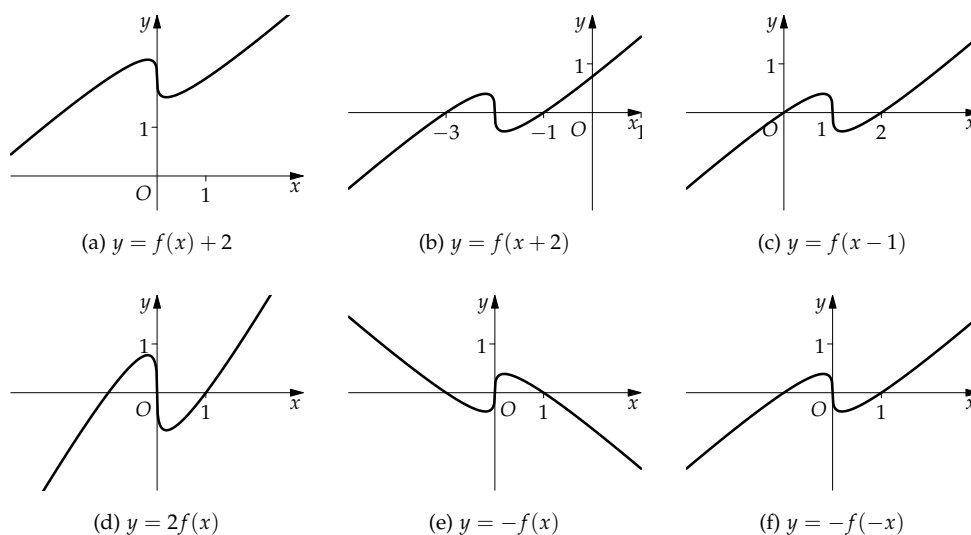
38.

FUNCTIE	DOMEIN
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$g(x) = 1 - x$	$\mathbb{R}$
$(f + g)(x) = \sqrt{x} + 1 - x$	$[0, \infty)$
$(f - g)(x) = \sqrt{x} - 1 + x$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$	$[0, \infty) \setminus \{1\}$
$\frac{g}{f}(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = 1 - (1 - x) = x$	$\mathbb{R}$

Tabel 12.1: Functies en hun domein

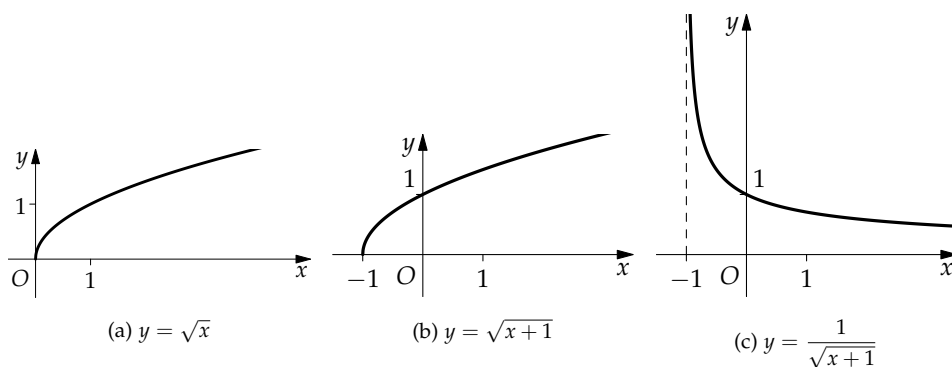
39.

Figuur 12.8:

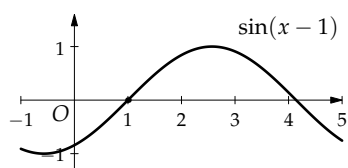


Merk op dat de laatste grafiek en die van $f(x)$ identiek zijn. Inderdaad is $-f(-x) = -(-x - \sqrt[3]{-x}) = -(-x + \sqrt[3]{x}) = x - \sqrt[3]{x} = f(x)$

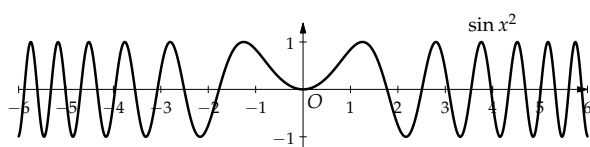
40.



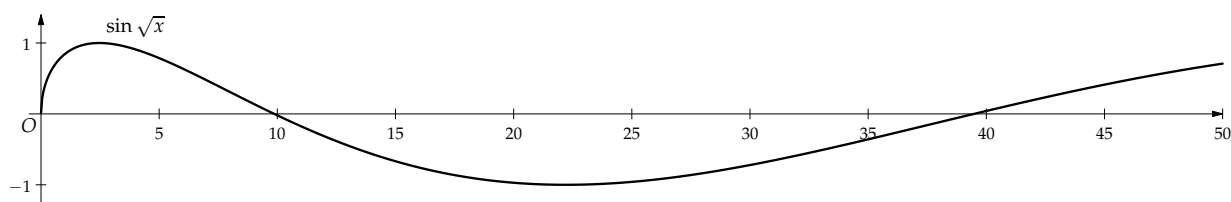
41.

Figuur 12.9: $y = \sin(x - 1)$

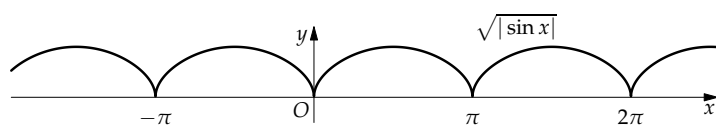
42.

Figuur 12.10: $y = \sin x^2$

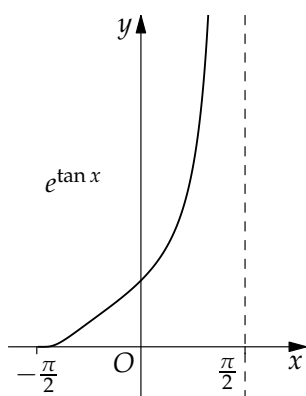
43.

Figuur 12.11: $y = \sin \sqrt{x}$

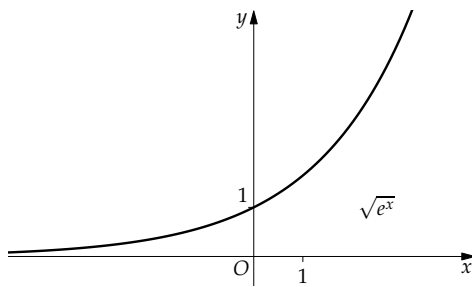
44.

Figuur 12.12: $y = \sqrt{|\sin x|}$

45.

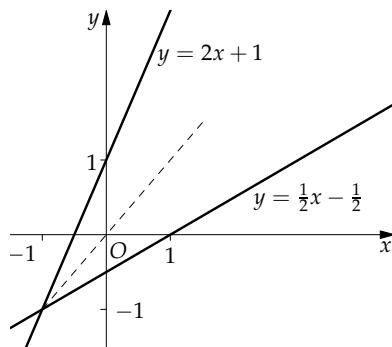
Figuur 12.13: $y = e^{\tan x}$

46.

Figuur 12.14: $y = \sqrt{e^x}$ 47. Schrijf $y = 2x + 1$, en vervang x door y en omgekeerd:

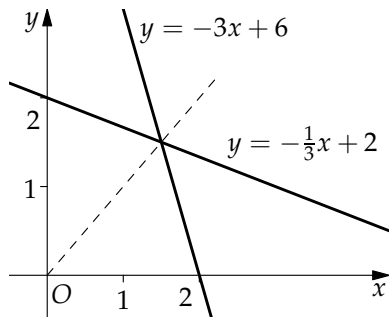
$$x = 2y + 1. \text{ Dus } 2y = x - 1, \text{ oftewel } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

En dus is $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. De grafieken van beide functies zie je in figuur 12.15

Figuur 12.15: Grafiek van $y = 2x + 1$ en zijn inverse $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

48. Gegeven is $f(x) = -3x + 6$. De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{-1} in het punt S . Wat zijn de coördinaten van S ? Teken de grafieken van f en f^{-1} in één figuur. De grafieken van f en f^{-1} zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. Ze kunnen elkaar dus alleen snijden op de lijn $y = x$, dus ligt S ook op de lijn $y = x$. $y = x$ snijden met $y = -2x + 6$ levert $x = -2x + 6$, dus $3x = 6$ oftewel $x = 2$. Dus S is het punt $(2, 2)$.

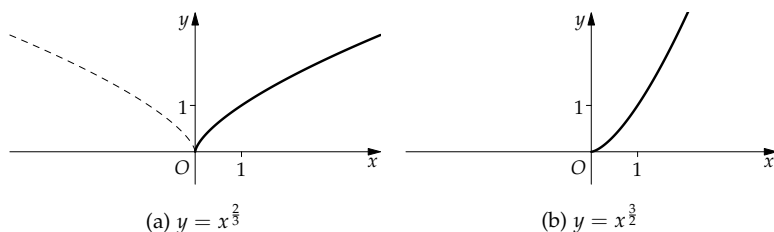
De inverse van f volgt uit $x = -3y + 6$, dus $3y = -x + 6$ oftewel $y = -\frac{1}{3}x + 2$. De grafieken van beide functies zie je in figuur 12.16

Figuur 12.16: Grafiek van $y = -3x + 6$ en zijn inverse $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 49. Merk op dat f een even functie is, dus bij elke y -waarde horen

(ten minste) twee x -waarden. Beperk het domein van f tot waarden $x \geq 0$. Er geldt ook $y \geq 0$. Verwisselen van x en y leidt tot $x = \sqrt[3]{y^2}$, dus $x^3 = y^2$, en dus is $y = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ de inverse, met $x \geq 0$.

De oorspronkelijke functie $y = \sqrt[3]{x^2}$ kun je schrijven als $y = x^{\frac{2}{3}}$, de inverse als $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$. Inderdaad is $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = x$.

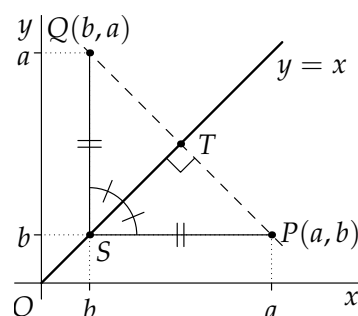
Zie figuur 12.17



Figuur 12.17: $y = x^{\frac{2}{3}}$ en zijn inverse $y = x^{\frac{3}{2}}$

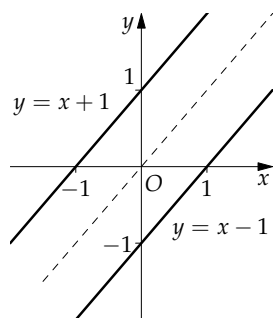
50. Teken de punten $P(a, b)$, $Q(b, a)$ en $S(b, b)$, zie figuur 12.18. Er geldt: $PS = |a - b| = QS$. Dus $\triangle PQS$ is een rechthoekige driehoek (geodriehoek) met hoeken van 45° bij P en bij Q .

De lijn $y = x$ is bissectrice van S , en dus middelloodlijn van de gelijkbenige driehoek PQS . Dus de lijn $y = x$ en de lijn door PQ staan loodrecht op elkaar, en $PT = QT$. Met andere woorden: P en Q zijn elkaars spiegelbeeld.



Figuur 12.18: De punten $P(a, b)$ en $Q(b, a)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$

51. Omdat $(2, 3)$ een punt van f^{-1} is, is $(3, 2)$ een punt van f . En $(2, 1)$ is een punt van f . De formule voor een lijn door twee gegeven punten uit paragraaf 3.13 zegt: $y - 1 = \frac{2-1}{3-2}(x - 2)$, oftewel $y = x - 1$. De gevraagde functie is dus $f(x) = x - 1$. De inverse is $x = y - 1$, oftewel $y = x + 1$. Zie figuur 12.19.



Figuur 12.19: Grafiek van $y = x - 1$ en zijn inverse $y = x + 1$

52. Meetkundig is in te zien dat een rechte lijn l samenvalt met zijn spiegelbeeld in de lijn $y = x$ in de volgende gevallen:

- als l de lijn $y = x$ zelf is, of
- als l loodrecht staat op de lijn $y = x$

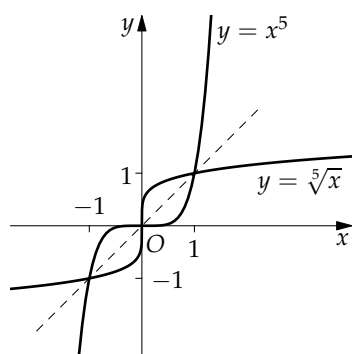
Ook algebraïsch is dit in te zien. Stel dat de vergelijking van f is: $y = ax + b$. Voor de inverse geldt dan: $x = ay + b$, oftewel $ay = x - b$, dus $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Willen de grafieken van $y = ax + b$ en $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ samenvallen, dan moet gelden: $a = \frac{1}{a}$ en $b = -\frac{b}{a}$.

Uit $a = \frac{1}{a}$ volgt $a^2 = 1$, dus $a = \pm 1$.

Als je $a = 1$ invult in $b = -\frac{b}{a}$, krijg je $b = -b$, dus $b = 0$. Dit levert de lijn $y = x$.

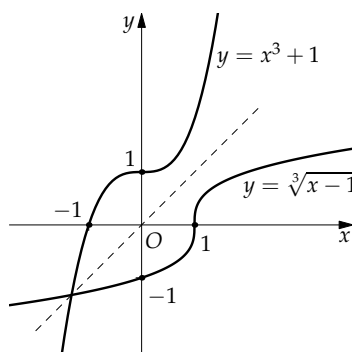
Als je $a = -1$ invult in $b = -\frac{b}{a}$, krijg je $b = b$, dus kan b elk getal zijn. Dit levert de lijnen $y = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

53. Uit $y = x^5$ volgt voor de inverse: $x = y^5$, oftewel $y = \sqrt[5]{x}$. Zie figuur 12.20.



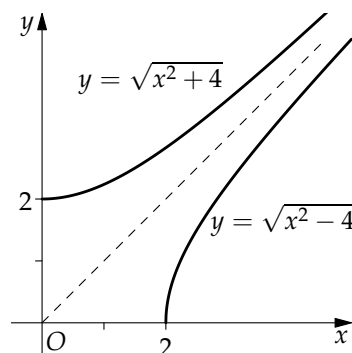
Figuur 12.20: Grafiek van $y = x^5$ en zijn inverse $y = \sqrt[5]{x}$

54. Uit $y = x^3 + 1$ volgt voor de inverse: $x = y^3 + 1$, oftewel $y^3 = x - 1$, dus $y = \sqrt[3]{x - 1}$. Zie figuur 12.21.



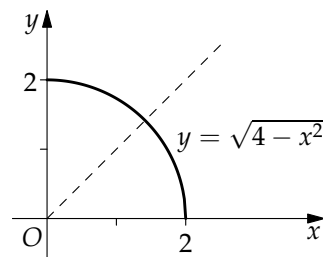
Figuur 12.21: Grafiek van $y = x^3 + 1$ en zijn inverse $y = \sqrt[3]{x-1}$

55. Uit $y = \sqrt{x^2 + 4}$ met $x \geq 0$ volgt $y \geq 2$. Verwisselen van x en y betekent voor de inverse: $x = \sqrt{y^2 + 4}$, met $x \geq 2$ en $y \geq 0$. Dus $x^2 = y^2 + 4$, oftewel $y^2 = x^2 - 4$, en dus $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$. Wegens $y \geq 0$ geldt $y = \sqrt{x^2 - 4}$. Zie figuur 12.22.



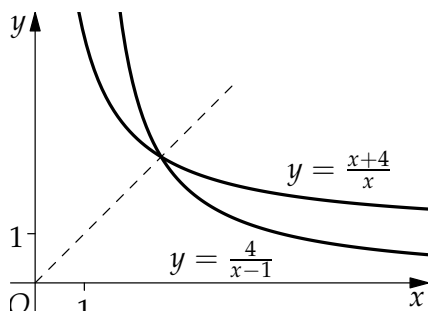
Figuur 12.22: Grafiek van $y = \sqrt{x^2 + 4}$ en zijn inverse $y = \sqrt{x^2 - 4}$

56. Uit $y = \sqrt{4 - x^2}$ met $0 \leq x \leq 2$ volgt $0 \leq y \leq 2$. Na verwisseling van x en y betekent dit voor de inverse: $x = \sqrt{4 - y^2}$, met $0 \leq x \leq 2$ en $0 \leq y \leq 2$. Dus $x^2 = 4 - y^2$, oftewel $y^2 = 4 - x^2$, dus $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Wegens $y \geq 0$ geldt $y = \sqrt{4 - x^2}$. Dus f en f^{-1} zijn hetzelfde. Zie figuur 12.23



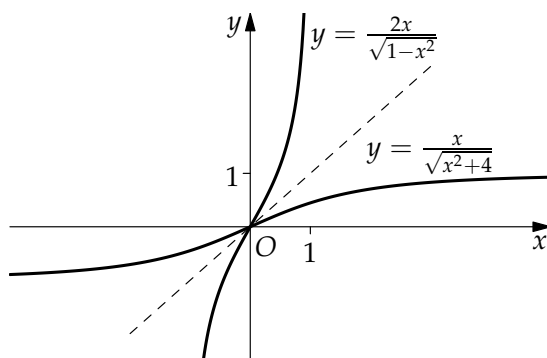
Figuur 12.23: $f(x) = \sqrt{4 - x^2} = f^{-1}(x)$ voor $0 \leq x \leq 2$

57. Uit $y = \frac{x+4}{x}$ volgt voor de inverse: $x = \frac{y+4}{y}$, oftewel $xy = y + 4$, dus $xy - y = 4$, dus $y(x - 1) = 4$ en dus $y = \frac{4}{x - 1}$. Zie figuur 12.24.



Figuur 12.24: Grafiek van $y = \frac{x+4}{x}$ en zijn inverse $y = \frac{4}{x-1}$

58. Uit $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ volgt voor de inverse: $x = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}}$, dus $x\sqrt{y^2 + 4} = y$, na kwadrateren $x^2(y^2 + 4) = y^2$. Dit levert $x^2y^2 + 4x^2 = y^2$, of $y^2 - x^2y^2 = 4x^2$, dus $y^2(1 - x^2) = 4x^2$, dus $y^2 = \frac{4x^2}{1 - x^2}$, oftewel $y = \pm \frac{2|x|}{\sqrt{1 - x^2}}$. Vanwege het $\pm$ -teken zijn de absoluutstrepen overbodig, dus $y = \pm \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$. In de oorspronkelijke functie zie je dat $x \geq 0$ leidt tot $y \geq 0$, dus voor de inverse geldt ook dat $x \geq 0$ samengaat met $y \geq 0$. De inverse is dus $y = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$. Zie figuur 12.25.

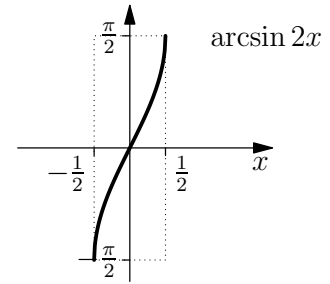
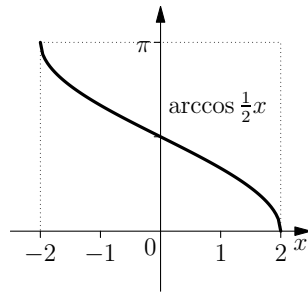


Figuur 12.25: Grafiek van $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ en zijn inverse $y = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$

- | | |
|---|---|
| 59. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}$ | 63. $\arctan \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ |
| 60. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ | 64. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ |
| 61. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ | 65. $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ |
| 62. $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ | 66. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ |

67. Zie figuur 12.26

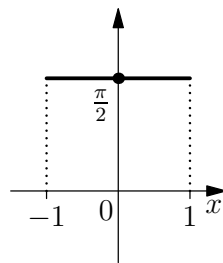
68.



Figuur 12.26: Afbeelding bij opgave 67

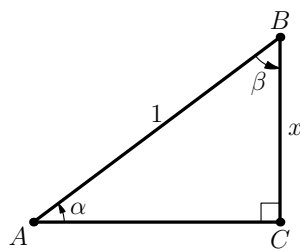
Figuur 12.27: $\arccos \frac{1}{2}x$

69. De grafiek van $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ bestaat uit een horizontaal lijnstukje op het interval $[-1, 1]$ door $y = \frac{\pi}{2}$, zie figuur 12.28.



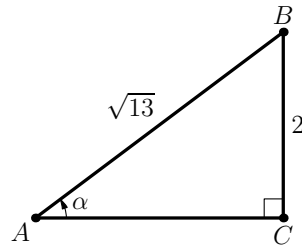
Figuur 12.28: $\arcsin x + \arccos x$

Een verklaring gaat als volgt: teken een rechthoekige driehoek met schuine zijde 1 en rechthoekszijde x , zoals in figuur 12.29. Dan geldt: $\sin \alpha = x$ en $\cos \beta = x$. Hieruit volgt $\arcsin x = \alpha$ en $\arccos x = \beta$. Omdat in $\triangle ABC$ geldt: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, geldt dus ook: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.



Figuur 12.29: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

70. Als $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$, dan is $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hoek α is dus de hoek bij A in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 3 en 4. De schuine zijde $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Dus $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ en $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.
71. Als $\alpha = \arcsin \frac{2}{13} \sqrt{13}$, dan is $\sin \alpha = \frac{2}{13} \sqrt{13} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Hoek α is dus de hoek bij A in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 2 en schuine zijde $\sqrt{13}$, zoals in figuur 12.30. De rechthoekszijde $AC = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 2^2} = 3$. Dus $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13} \sqrt{13}$ en $\tan \alpha = \frac{2}{3}$.

Figuur 12.30: $\alpha = \arcsin \frac{2}{13} \sqrt{13}$

72. Teken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 1 en rechthoekszijde x , zoals in figuur 12.31. Dan geldt: $\tan \alpha = x$ en $\tan \beta = \frac{1}{x}$. Dus $\alpha = \arctan x$ en $\beta = \arctan \frac{1}{x}$. In driehoek ABC geldt: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Dus $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

73. Stel $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ en $\beta = \arctan \frac{1}{3}$. Dan is $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ en $\tan \beta = \frac{1}{3}$.

$$\text{Dus } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

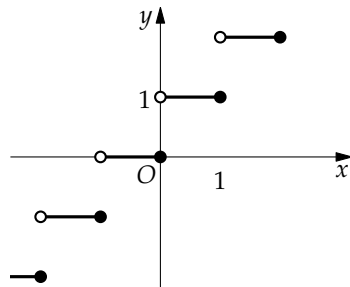
$$\text{En dus } \alpha + \beta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \text{ Dus } \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

74. Stel $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$ en $\beta = \arctan \frac{1}{5}$. Dus $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ (en dus $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, zie figuur 12.30 en de uitwerking van opgave 71). Ook is $\tan \beta = \frac{1}{5}$.

$$\text{Dus } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{10}{15} + \frac{3}{15}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1.$$

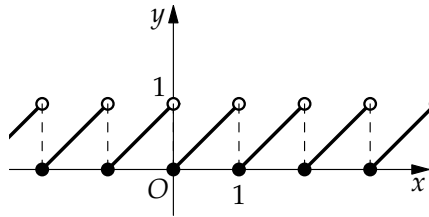
$$\text{Dus } \alpha + \beta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \text{ Conclusie: } \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} + \arctan \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$$

75.

Figuur 12.32: $y = [x]$

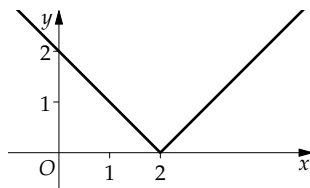
76. Als $x \in \mathbb{Z}$ geldt $[x] = x = \lceil x \rceil$

77. Deze functie heet ook wel *zaagtandfunctie*.

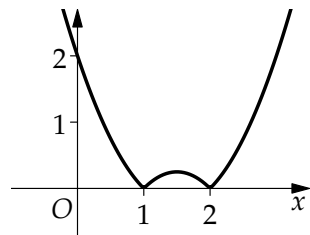

 Figuur 12.33: $y = x - [x]$

78. Omdat f even is geldt voor alle x : $f(x) = f(-x)$. Omdat f oneven is geldt voor alle x : $f(-x) = -f(x)$.
 Dus $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Uit $f(x) = -f(x)$ volgt $2f(x) = 0$.
 Dit kan alleen als $f(x) = 0$.

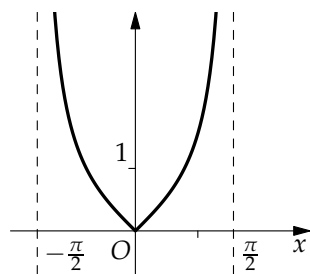
79.


 Figuur 12.34: $y = |x - 2|$

80.

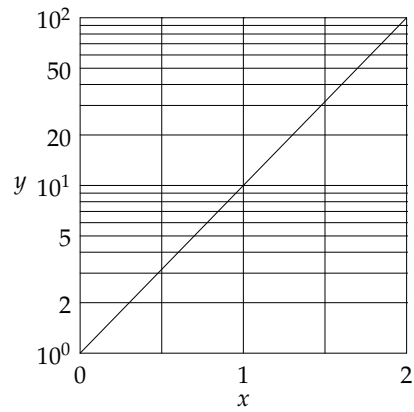

 Figuur 12.35: $y = |x^2 - 3x + 2|$

81.


 Figuur 12.36: $y = |\tan x|$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

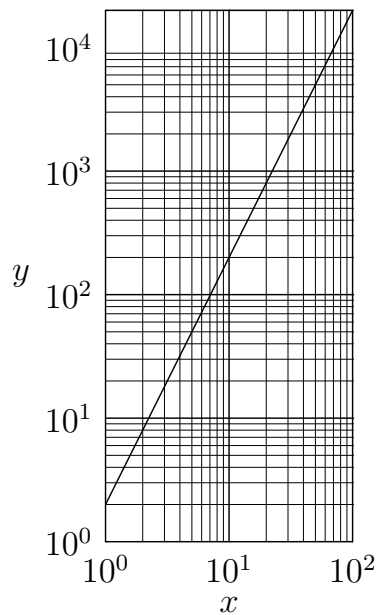
82. De horizontale lijnen tussen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ bevinden zich bij 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.
 De horizontale lijnen tussen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$ bevinden zich bij 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 en 90. Zie figuur 12.37.
 De verticale lijnen bevinden zich bij 0, 0.5, 1, 1.5 en 2. Er geldt:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| (a) $f(0.5) \approx 3.1$ | (c) $f^{-1}(5) \approx 0.7$ |
| (b) $f(1.5) \approx 31$ | (d) $f^{-1}(80) \approx 1.9$ |



Figuur 12.37: De grafiek van $y = 10^x$ op logaritmisch papier

83. De grafiek is een rechte lijn, begint linksonder in het punt (1,2), en loopt rechtsboven tot het punt (100,20000)



Figuur 12.38: De grafiek van $y = 2x^2$ op dubbellogaritmisch papier

Uitwerkingen hoofdstuk 5

1. a. $\lim_{x \uparrow -1} f(x) = 2$ d. $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 3$
 b. $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = 2$ e. $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = 1$
 c. $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2$ f. $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = 1$

2. $\lim_{x \uparrow 0} \operatorname{sgn} x = -1$ en $\lim_{x \downarrow 0} \operatorname{sgn} x = +1$

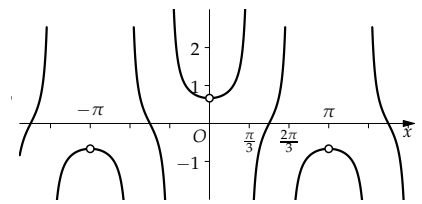
3. a. $f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{\sin(-3x)} = \frac{-\sin 2x}{-\sin 3x} = \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = f(x).$

Dus is f een even functie.

b.

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01	0.001
$f(x)$	6.4434	0.8436	0.6723	0.6681	0.6667	0.666667

- c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$
- d. $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -\frac{2}{3}$
4. $f(0) = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{0}{0}$. Als je met een digitaal hulpmiddel (desmos.com, wolframalpha.com) de grafiek laat tekenen zie je dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$. Invullen van x -waarden dichtbij nul bevestigen dat, bijvoorbeeld: $f(0.001) = 0.0005$.
5. $f(0) = \frac{0}{0}$.
 Als je de grafiek laat tekenen zie je dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Invullen van x -waarden dichtbij nul bevestigen dat, bijvoorbeeld: $f(0.001) = 0.499999958$.
6. $f(0) = \frac{1}{0}$. In de grafiek zie je dat $\lim_{x \uparrow 0} \frac{\cos x}{x} = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos x}{x} = +\infty$. De linker- en rechterlimiet zijn oneindig groot én verschillend. Om beide redenen bestaat de gevraagde limiet niet.
7. $f(\pi) = \frac{\cos \pi}{\pi} = \frac{-1}{\pi} \approx -0.318$. Hier is geen probleem. Er geldt:
 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x} = -\frac{1}{\pi}$
8. $f(0) = \frac{2^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$. Uit de grafiek kun je aflezen dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \approx 0.693$. Invullen van x -waarden dichtbij nul bevestigen dat, bij-



Figuur 13.1: $y = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

voorbeeld: $f(0.001) = 0.693387$.

$$9. f(4) = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}.$$

Uit de grafiek is af te lezen dat $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$. Invullen van waarden in de buurt van $x = 4$ bevestigen dat, bijvoorbeeld: $f(3.99) \approx 0.2502$.

Alternatief: De noemer van f kun je ontbinden in $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$.

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

$$10. f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}. \text{ Uit de grafiek lees je af: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Invullen van waarden in de buurt van $x = 0$ bevestigen dat, bijvoorbeeld: $f(0.01) \approx 1.99987$.

$$11. f(\pi) = \frac{\sin 2\pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0. \text{ Dus } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x} = 0$$

$$12. \text{ Vul } x = 5 \text{ in, in de gegeven functie: } f(5) = 31, \text{ dus } \lim_{x \rightarrow 5} x^2 + x + 1 = 31$$

$$13. \text{ Evenzo: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$14. \text{ Evenzo: } \lim_{x \rightarrow 0} \arctan x = \arctan 0 = 0$$

$$15. \text{ Evenzo: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$16. \text{ a. Als } x > 2, \text{ dan is } |x-2| = x-2, \text{ en}$$

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

$$\text{b. Als } x < 2, \text{ dan is } |x-2| = 2-x, \text{ en}$$

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{2-x}{x^2+x-6} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5}$$

c. Omdat de linker-en rechterlimiet verschillend zijn, bestaat

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ niet.

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x}{x} = \frac{4+4}{2} = 4$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+7}{4x} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x-3}{2x+5} = \frac{9+9-3}{6+5} = \frac{15}{11}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+x-30}{x+5} = \frac{25+5-30}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x^3} = \frac{16-16}{64} = 0$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 6x^2}{2x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 9x} \quad (x = 0 \text{ invullen levert } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6x)}{x(2x^3 - 4x^2 - 15x + 9)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6x}{2x^3 - 4x^2 - 15x + 9} = \frac{0}{9} = 0$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 5x}{6x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{6x^3 - 9x^2 - 2x - 3} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 11x^2 + 30x}{x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 5x^2 + 17x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 11x + 30}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 5x + 17} = \frac{30}{17}$$

$$26. x = 2 \text{ invullen levert } \frac{8 + 16 - 12 - 12}{8 + 12 - 8 - 12} = \frac{0}{0}, \text{ dus zowel teller als noemer bevatten een factor } (x - 2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x^2 - 6x - 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 6x + 6)}{(x - 2)(x^2 + 5x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x + 6}{x^2 + 5x + 6}$$

$$= \frac{4 + 12 + 6}{4 + 10 + 6} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$$

$$27. x = 2 \text{ invullen levert } \frac{0}{0}, \text{ dus teller en noemer bevatten een factor } (x - 2):$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}{x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 11x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 7x + 12)}{(x - 2)(x^4 + 3x - 5)} = \frac{30}{17}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x - 15}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 5)}{(x - 3)(x + 5)} = \frac{23}{8}$$

$$29. \lim_{x \downarrow 0} \frac{2x + 5}{\sin x} = \frac{5}{+0} = +\infty$$

$$30. \lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{4 + 4}{+0} = +\infty$$

$$31. \lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{4 + 4}{-0} = -\infty$$

32. De uitkomst is afhankelijk van welke kant je $x = 3$ nadert:

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{9 + 2}{+0} = +\infty \text{ en } \lim_{x \uparrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{9 + 2}{-0} = -\infty$$

$$33. \lim_{x \downarrow 0} \frac{3x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 6x}{2x^4 - 4x^3 - 15x^2} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x(3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6)}{x(2x^3 - 4x^2 - 15x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6}{2x^3 - 4x^2 - 15x}$$

De noemer is gelijk aan $2x^3 - 4x^2 - 15x = x(2x^2 - 4x - 15)$.

Als je $x = 0$ invult in $y = 2x^2 - 4x - 15$, krijg je $y = -15$. Dus als $x \downarrow 0$ is de noemer $x(2x^2 - 4x - 15)$ negatief, en deze noemer gaat

naar nul. Dus $\lim_{x \downarrow 0} \frac{3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6}{x(2x^2 - 4x - 15)} = \frac{6}{-0} = -\infty$

$$34. \lim_{x \uparrow 0} \frac{2x^6 - 3x^5 + 7x^2 - 4x}{8x^4 - 10x^3 + 15x^2} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2x^5 - 3x^4 + 7x - 4}{8x^3 - 10x^2 + 15x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2x^5 - 3x^4 + 7x - 4}{x(8x^2 - 10x + 15)}$$

Als $x \uparrow 0$ is $8x^2 - 10x + 15 > 0$, en dus is $x(8x^2 - 10x + 15) < 0$ in de buurt van 0.

Daaruit volgt $\lim_{x \uparrow 0} \frac{2x^5 - 3x^4 + 7x - 4}{x(8x^2 - 10x + 15)} = \frac{-4}{-0} = +\infty$

35. De functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, dus is daar niet continu. De limiet in $x = 1$ bestaat echter wel:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

Wanneer je $f(1) = 4$ definieert, krijg je een continue functie. De definitie van f kan er dan zo uitzien:

$$f(x) = 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

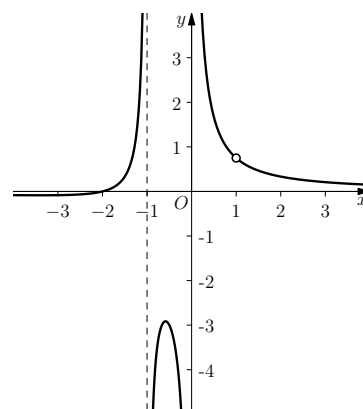
36. f is niet gedefinieerd als de noemer 0 is, dus als $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$, oftewel als $x = -1$, $x = 0$ of $x = 1$. Zie ook figuur 13.2.

Als je $x = 1$ invult krijg je $\frac{0}{0}$. De teller kun je ontbinden: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Dus

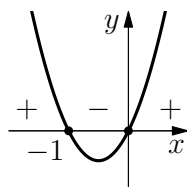
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{2x(x + 1)} = \frac{3}{4}$$

Wanneer je $x = -1$ of $x = 0$ invult is de teller niet 0, maar de noemer wel. De functiewaarden worden oneindig groot. Afhankelijk van het feit of je van de linker- of van de rechterkant naar een van deze punten nadert, zal de limiet $+\infty$ of $-\infty$ worden.

De noemer $2x(x + 1)$ is een tweedegraads functie (dalparabool) met nulpunten bij -1 en 0 , en dus tekenwisseling bij -1 en 0 , zie figuur 13.3



Figuur 13.2: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2(x^3 - x)}$



Figuur 13.3: De noemer $2x(x + 1)$

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x + 2}{2x(x + 1)} = \frac{-1 + 2}{+0} = \frac{1}{+0} = \infty$$

En ook:

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x + 2}{2x(x + 1)} = \frac{-1 + 2}{-0} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

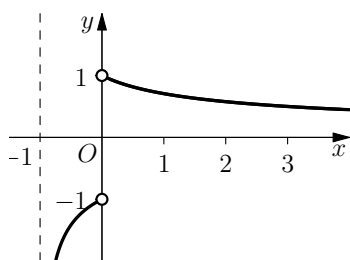
Evenzo:

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x + 2}{2x(x + 1)} = \frac{0 + 2}{-0} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

en:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x + 2}{2x(x + 1)} = \frac{0 + 2}{+0} = \frac{2}{+0} = \infty$$

37.

Figuur 13.4: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

f is gedefinieerd voor $x^3 + x^2 > 0$, dus als $x^2(x+1) > 0$, en dit is het geval als $x > -1$. Verder geldt:

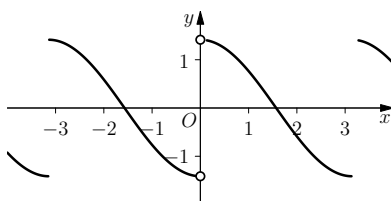
$$\sqrt{x^3 + x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = \begin{cases} x\sqrt{x+1}, & x \geq 0 \\ -x\sqrt{x+1}, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dus } \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{En } \lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{-x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{-\sqrt{x+1}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Dus de linker- en rechterlimiet verschillen in $x = 0$, en daarom bestaat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet.

38.

Figuur 13.5: $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan x}$

$f(0)$ bestaat niet (er komt $\frac{0}{0}$ uit). Gonioformule 16a uit paragraaf 4.13 zegt: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$.

Dus in de buurt van 0 geldt:

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \begin{cases} \sqrt{2} \sin x, & x > 0 \\ -\sqrt{2} \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

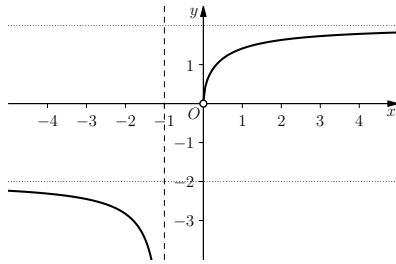
$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \downarrow 0} \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$$

$$\text{Evenzo: } \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan x} = -\sqrt{2}$$

Dus de linker- en rechterlimiet verschillen in 0, en daarom bestaat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet.

De functie is gedefinieerd als $x^2 + x > 0$, oftewel $x(x+1) > 0$ en dus $x < -1$ of $x > 0$. Dus voor grote positieve en negatieve waarden van x is de functie gedefinieerd. Verder geldt (deel teller en noemer door x):

39.

Figuur 13.6: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x/x}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0}} = 2$$

Bij het uitrekenen van $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ is x negatief, en dan is $-x$ positief.

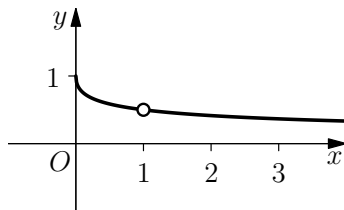
Deel in dat geval teller en noemer door $-x$, dan kun je $-x$ onder het wortelteken brengen (als x^2):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x/-x}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 0}} = -2$$

De limiet die bij de verticale asymptoot hoort is:

$$\lim_{x \uparrow -1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}} = \frac{-2}{+0} = -\infty$$

40.

Figuur 13.7: $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

De functie is gedefinieerd voor $x \geq 0$, en $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$.

$x = 1$ invullen levert $\frac{0}{0}$.

Merk op dat $x - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$. Dus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Alternatief: vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{x} + 1$ (de worteltruc):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

$$\begin{aligned} 41. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 8x^2 - 7x + 6}{2x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 9x} & \quad (\text{deel teller en noemer door } x^4) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{7}{x^3} + \frac{6}{x^4}}{2 - \frac{4}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{9}{x^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0 + 0}{2 - 0 - 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} \quad (\text{deel teller en noemer door } x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$43. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 8x^3 - 7x + 6}{2x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{6}{x^4}}{2 - \frac{4}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{9}{x^3}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$44. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 7x^3 - 7x + 6}{2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x - 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{7}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{6}{x^4}}{2 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{10}{x^4}} = \frac{4}{2} = 2$$

45. Een staartdeling geeft $f(x) = x - \frac{x}{x^2 + 1}$. Verder is

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Dus $y = x$ is de scheve asymptoot.

46. De gegeven functie als aparte breuken schrijven levert $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}$. Wegens $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, is $y = \frac{1}{2}x + 1$ de scheve asymptoot.

47. Uit een staartdeling volgt $f(x) = x + 3 + \frac{8x + 11}{x^2 - 2x - 2}$. Wegens

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x + 11}{x^2 - 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{8}{x} + \frac{11}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \text{ is } y = x + 3 \text{ de scheve asymptoot.}$$

48. Stel de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = ax + b$. Nu is

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + 1 & \text{Als } x > 0 \text{ geldt } \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + x} &= \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Dus $a = 2$.

De waarde van b bereken je met

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} + x - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \cdot (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \text{deel teller en noemer door } x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $b = \frac{1}{2}$. De vergelijking van de scheve asymptoot (voor $x \rightarrow \infty$) is $y = 2x + \frac{1}{2}$.

49. a. Stel de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = ax + b$, dan geldt, zie paragraaf 5.14:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} \stackrel{\text{wegens } x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1$$

En verder:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{\frac{x^2 + 4x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Dus de asymptoot is $y = x + 2$

b. De functie is gedefinieerd voor $x \leq -4$. Er geldt:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} \stackrel{\text{wegens } x \leq -4}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2 + 4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{4}{x}} = -1$$

En verder:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{\frac{x^2 + 4x}{x^2}} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - 1} = \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

Dus de asymptoot is $y = -x - 2$

50. Stel de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = ax + b$, dan geldt, zie paragraaf 5.14:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

Dus heeft a geen eindige waarde en is $y = ax + b$ geen scheve asymptoot.

51. Stel de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = ax + b$, dan volgt met paragraaf 5.14:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

En verder:

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{x} = -\infty$$

Dus heeft b geen eindige waarde en is $y = ax + b$ geen scheve asymptoot.

52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{(\text{als } x \rightarrow 0 \text{ dan } 3x \rightarrow 0)}{=} 1$

53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{3x}{2x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Alternatief:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 2x = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

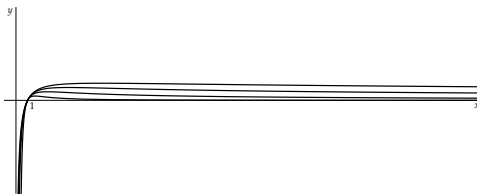
$$58. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x + 1} = \frac{\sin 0}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$59. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - \frac{\tan x}{x} = 1 - 1 = 0$$

$$60. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

62. Zie figuur 13.8.



Figuur 13.8: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^p}$, $p > 0$ gaat naar 0 voor $x \rightarrow \infty$

De functiewaarden dalen langzaam naar nul als $x \rightarrow \infty$.

$$63. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{x^2}{3x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x^2}{\tan^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x \cdot 2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

66. Gonioformule 16a uit paragraaf 4.13 zegt:

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \text{ dus } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x, \text{ dus } \cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{1}{2}x$$

Invullen in de limiet:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x}{x} \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}x = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{2})}{2x + \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(0 + \frac{\pi}{2})}{0 + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \text{ zie opgave 66 } 1 \cdot 0 = 0$$

$$69. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x^2}{\sin^2 \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x^2}{2x^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x} \cdot \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

$$71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x^2)}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$73. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\ln 2x}{2x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{2x} = 2 \cdot 0 = 0$$

Alternatief:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = 0 + 0 = 0$$

$$74. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{100}}}{3 \ln x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{100}}}{\frac{x}{100}} \cdot \frac{\frac{x}{100}}{3 \cdot 5 \ln x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{100}}}{\frac{x}{100}} \cdot \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{1}{100 \cdot 15} \right] = \infty \cdot \infty \cdot \frac{1}{1500} = \infty$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}.$$

Formule 26 uit paragraaf 4.13 zegt: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Dus $\cos 3x - \cos x = -2 \sin \frac{4x}{2} \sin \frac{2x}{2}$. Dus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sin x}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin x}{x} = -2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$

$$76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \ln(1+x^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \right] \text{ zie opgave 66 } 1 + 0 = 1$$

78.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 3x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = ? \end{aligned}$$

De eerste limiet is gelijk aan 1. De tweede is met behulp van $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ te schrijven als:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \cos^2 x - 3} = \frac{1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}$$

$$79. x = 1 \text{ invullen in } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\tan \pi x} \text{ levert } \frac{0}{0}. \text{ Stel } x - 1 = p.$$

Als $x \rightarrow 1$ dan $p \rightarrow 0$. $x = p + 1$ invullen in $\tan \pi x$:

$$\tan \pi x = \tan \pi(p + 1) = \tan(\pi p + \pi) = \tan \pi p$$

(wegens $\tan(x + \pi) = \tan x$). Dus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\tan \pi x} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{\tan \pi p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\pi p}{\tan \pi p} \cdot \frac{1}{\pi} = 1 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$80. \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{1}{+0} = \infty$$

Uitwerkingen Hoofdstuk 6

1. a. Het differentiequotiënt op $[2, 3]$:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{4}3^2 - \frac{1}{4}2^2}{1} = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$$

- b. Op $[2, 2\frac{1}{2}]$:

$$\frac{f(2\frac{1}{2}) - f(2)}{2\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{1}{4}2\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{4}2^2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}\frac{25}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{16} \cdot 2 = \frac{9}{8}$$

- c. Op $[2, 2.1]$:

$$\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{\frac{1}{4}2.1^2 - \frac{1}{4}2^2}{0.1} = \frac{\frac{1}{4}4.41 - 1}{0.1} = \frac{1.1025 - 1}{0.1} = 1.025 (= \frac{41}{40})$$

- d. Op $[2, 2 + h]$:

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} &= \frac{\frac{1}{4}(2+h)^2 - \frac{1}{4}2^2}{h} = \frac{\frac{1}{4}(4 + 4h + h^2) - 1}{h} \\ &= \frac{1 + h + \frac{1}{4}h^2 - 1}{h} = \frac{h + \frac{1}{4}h^2}{h} = 1 + \frac{1}{4}h \end{aligned}$$

Achteraf gezien was het handiger geweest eerst dit onderdeel te maken, en het antwoord $1 + \frac{1}{4}h$ te gebruiken om de differentiequotiënten van de vorige onderdelen te berekenen door achtereenvolgens $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$ en $h = 0.1$ in te vullen.

- e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{4}h = 1$, en dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2, f(2)) = (2, 1)$.

2. a. Het differentiequotiënt op $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 - (1^2 + 3 \cdot 1)}{1} = 4 + 6 - 4 = 6$$

- b. Op $[1, 1.1]$:

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 + 3 \cdot 1.1 - (1^2 + 3 \cdot 1)}{0.1} = \frac{1.21 + 3.3 - 4}{0.1} = \frac{0.51}{0.1} = 5.1$$

- c. Op $[1, 1.01]$:

$$\frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1} = \frac{1.01^2 + 3 \cdot 1.01 - (1^2 + 3 \cdot 1)}{0.01} = \frac{1.0201 + 3.03 - 4}{0.01} = \frac{0.0501}{0.01} = 5.01$$

d. 5.001

e. Op $[1, 1+h]$:

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} &= \frac{(1+h)^2 + 3(1+h) - (1^2 + 3 \cdot 1)}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 3 + 3h - 4}{h} = \frac{5h + h^2}{h} = 5 + h\end{aligned}$$

Dit antwoord is in overeenstemming met de antwoorden van

a. tot en met d. ($h = 1$, $h = 0.1$, $h = 0.01$ en $h = 0.001$).

$$\text{f. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 + h = 5$$

g. Differentiequotiënt van f op $[a, a+h]$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} &= \frac{(a+h)^2 + 3(a+h) - (a^2 + 3a)}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - a^2 - 3a}{h} = \frac{2ah + h^2 + 3h}{h} = 2a + 3 + h\end{aligned}$$

$$\text{h. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + 3 + h = 2a + 3$$

3. $f(x) = 3x + 10$ op $[a, a+h]$: het differentiequotiënt is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{3(a+h) + 10 - (3a + 10)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Dit antwoord was te verwachten omdat de grafiek van f een lijn met helling 3 is, en een lijnstuk door twee verschillende punten van die lijn dus ook helling 3 heeft.

4. $f(x) = \frac{2}{x-2}$ op $[a, a+h]$, $a \neq 2$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{2}{a+h-2} - \frac{2}{a-2}}{h} \\ &= \frac{\frac{2(a-2) - 2(a+h-2)}{(a+h-2)(a-2)}}{h} = \frac{\frac{-2h}{(a+h-2)(a-2)}}{h} = \frac{-2}{(a+h-2)(a-2)}\end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{2}{x-2}$ op $[3, 3+h]$; $a = 3$ invullen in het antwoord van de vorige opgave:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{(3+h-2)(3-2)} = \frac{-2}{1+h}$$

6. $f(x) = x^3$ op $[1, 1+h]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2$$

7. $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$ 8. $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$ 9. $f(x) = 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3$

$$10. f(x) = 4 - 5x \Rightarrow f'(x) = -5$$

$$11. f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$$

$$12. f(x) = 2x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 4x$$

$$13. f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$$

$$14. f(t) = 4 - t^2 \Rightarrow f'(t) = -2t$$

$$15. f(s) = (s - 1)^2, \text{ dus } f(s) = s^2 - 2s + 1 \Rightarrow f'(s) = 2s - 2$$

$$16. f(x) = \frac{1}{2x}, \text{ dus } f(x) = \frac{1}{2}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot -1x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$17. f(x) = \sqrt{5}x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{5}$$

$$18. f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$$

$$19. f(x) = \frac{x(x-1)}{3}, \text{ dus } f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$20. f(x) = x^2 = x \cdot x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = x + x = 2x$$

21. a. Met de productregel:

$$f(x) = (x+3)(x-1) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot (x-1) + (x+3) \cdot 1 = x-1 + x+3 = 2x+2$$

b. Eerst haakjes uitwerken: $f(x) = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$,
dus $f'(x) = 2x + 2$

22. a. Met de productregel:

$$f(x) = (3x^2 - 1)(\pi + x^3) \Rightarrow f'(x) = 6x \cdot (\pi + x^3) + (3x^2 - 1) \cdot 3x^2 = 6\pi x + 6x^4 + 9x^4 - 3x^2 = 15x^4 - 3x^2 + 6\pi x$$

b. Eerst haakjes uitwerken: $f(x) = (3x^2 - 1)(\pi + x^3) = 3\pi x^2 + 3x^5 - \pi - x^3$, dus $f'(x) = 6\pi x + 15x^4 - 3x^2$

$$23. f(x) = (4x+3)^2 = 16x^2 + 24x + 9 \Rightarrow f'(x) = 32x + 24$$

$$24. f(x) = \frac{4x-7}{3-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 \cdot (3-x^2) - (4x-7) \cdot -2x}{(3-x^2)^2} = \frac{12-4x^2+8x^2-14x}{(3-x^2)^2} = \frac{4x^2-14x+12}{(3-x^2)^2}$$

$$25. f(x) = (x^3 - 4x)(3x^5 - x^2 + 6x) \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - 4)(3x^5 - x^2 + 6x) + (x^3 - 4x)(15x^4 - 2x + 6) = (9x^7 - 3x^4 + 18x^3 - 12x^5 + 4x^2 - 24x) + (15x^7 - 2x^4 + 6x^3 - 60x^5 + 8x^2 - 24x) = 24x^7 - 72x^5 - 5x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 48x$$

$$26. f(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{x}{3} + \frac{4}{5} + \frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5} + 1 + x^{-1}, \text{ dus } f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-3} - \frac{1}{3} + 0 + 0 - x^{-2} = -\frac{4}{3x^3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} = \frac{-4 - x^3 - 3x}{3x^3} = -\frac{x^3 + 3x + 4}{3x^3}$$

$$27. r(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{5}{t^4} \Rightarrow r'(t) = 2t - 2t^{-3} - 20t^{-5} = 2t - \frac{2}{t^3} - \frac{20}{t^5}$$

$$28. s(x) = \frac{7}{x^2} + x^{\frac{2}{3}} + C \Rightarrow s'(x) = -14x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{14}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$29. f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 7}{x^2} = x + 1 + x^{-1} - 7x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 1 + 0 - x^{-2} + 14x^{-3} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{14}{x^3} = \frac{x^3 - x + 14}{x^3}$$

$$30. g(t) = \frac{3t+5}{t+8} \Rightarrow g'(t) = \frac{3 \cdot (t+8) - (3t+5) \cdot 1}{(t+8)^2} = \frac{3t+24-3t-5}{(t+8)^2} = \frac{19}{(t+8)^2}$$

$$31. h(x) = x^2(x+2)^2 = x^2(x^2+4x+4) = x^4+4x^3+4x^2, \text{ dus } h'(x) = 4x^3+12x^2+8x$$

$$32. i(x) = \frac{x^2(x+2)^2}{x-1} = \text{zie opgave 31} = \frac{h(x)}{x-1}. \text{ Dus } i'(x) = \frac{h'(x) \cdot (x-1) - h(x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(4x^3+12x^2+8x)(x-1) - (x^4+4x^3+4x^2)}{(x-1)^2} = \frac{4x^4+12x^3+8x^2-4x^3-12x^2-8x-x^4-4x^3-4x^2}{(x-1)^2} = \frac{3x^4+4x^3-8x^2-8x}{(x-1)^2}$$

33. a. $f(0) = 0, f(1) = -1$ en $f(2) = 0$. Dus de gemiddelde helling van f op $[0, 1]$ is $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -1$, en de gemiddelde helling op $[1, 2]$ is $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = +1$

b. Het differentiequotiënt op $[1, 1+h]$ is $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-2(1+h)-(1^2-2 \cdot 1)}{h} = \frac{1+2h+h^2-2-2h+1}{h} = \frac{h^2}{h} = h$

c. De helling van f bij $x = 1$ is $\lim_{h \rightarrow 1} h = 0$

d. De raaklijn aan f in het punt $(1, f(1))$ gaat door het punt $(1, f(1))$ en de helling is 0. De vergelijking van de raaklijn is dus $y - f(1) = 0 \cdot (x - 1)$, oftewel $y = -1$

34. Zie stelling 6.14.

35. Zie stelling 6.16.

36. De productregel luidt: $[fg]' = f'g + fg'$. Neem $f(x) = c$ en $g = g(x)$. Dan is $[cg(x)]' = c'g(x) + cg'(x) = 0 \cdot g(x) + cg'(x) = cg'(x)$

$$37. f(x) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{5} \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$$

$$38. f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$39. f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

40. $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^1} = x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$
41. $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$.
42. $f(x) = 2 \sin x + \tan x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$
43. $f(t) = t^2 + \cos t \Rightarrow f'(t) = 2t - \sin t$
44. $f(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x \Rightarrow$
 $f'(x) = -\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot -\sin x = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$
45. $f(x) = \tan^2 x = \tan x \cdot \tan x \Rightarrow$
 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x + \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$
46. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
47. $f(x) = \frac{\tan x}{1-x}$, dus
 $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(1-x) - \tan x \cdot -1}{(1-x)^2} = \frac{1-x + \cos^2 x \tan x}{\cos^2 x(1-x)^2}$
48. $f(x) = \frac{1+\sin x}{1+x}$, dus
 $f'(x) = \frac{\cos x \cdot (1+x) - (1+\sin x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{\cos x + x \cos x - 1 - \sin x}{(1+x)^2}$
49. $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, dus
 $f'(x) = \frac{\cos x \cdot (1-\cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2}$
 $= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(\cos x - 1)^2} = \frac{1}{\cos x - 1}$
50. $f(x) = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$
(zie voorbeeld 6.29 en opgave 44) $f'(x) = -\sin 2x - \sin 2x = -2 \sin 2x$
51. $f(x) = e^{2x} = e^x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$
52. $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2 \sin 2x$
53. $f(x) = \tan 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2 2x}$
54. $f(x) = \cos(x^3 + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x^3 + \frac{\pi}{3}) \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3 + \frac{\pi}{3})$
55. $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$, dus
 $f'(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = \frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$
56. $f(x) = \sin \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
57. $f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
58. $f(x) = (2x+4)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(2x+4)^4 \cdot 2 = 10(2x+4)^4 = 160(x+2)^4$

$$59. f(x) = (x - 2x^2)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - 2x^2) \cdot (1 - 4x)$$

$$60. f(x) = 2\sqrt{3 - 7x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - 7x}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}.$$

$$61. f(x) = \frac{4}{(2 - x^2)^3} = 4(2 - x^2)^{-3} \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot -3(2 - x^2)^{-4} \cdot -2x = \frac{24x}{(2 - x^2)^4}$$

$$62. \tan \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}$$

$$63. f(x) = \sqrt{3 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}$$

$$64. f(x) = \sin(x^2 + 2x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2).$$

$$65. f(x) = \sin^2(x^2 + 2x), \text{ dus} \\ f'(x) = 2 \sin(x^2 + 2x) \cdot \cos(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2) = \sin[2(x^2 + 2x)] \cdot (2x + 2)$$

$$66. f(x) = \sin(\cos x), \text{ dus} \\ f'(x) = \cos(\cos x) \cdot -\sin x = -\cos x \cdot \sin(\sin x)$$

$$67. f(x) = \cos(\sin x), \text{ dus} \\ f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

$$68. f(x) = \sin(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$69. f(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{x}\right), \text{ dus} \\ f'(x) = \cos\left(\frac{\cos x}{x}\right) \cdot \left(\frac{-\sin x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2}\right) = -\cos\left(\frac{\cos x}{x}\right) \cdot \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}\right)$$

$$70. f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{x}, \text{ dus} \\ f'(x) = \frac{\cos(\cos x) \cdot -\sin x \cdot x - \sin(\cos x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{x \sin x \cos(\cos x) + \sin(\cos x)}{x^2}$$

$$71. f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}, \text{ en} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

$$72. f(x) = \sin \sqrt{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \cos \sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x \cdot \cos \sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$73. f(x) = \cos \sqrt{\sin(\tan x)}, \text{ dus} \\ f'(x) = \sin \sqrt{\sin(\tan x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(\tan x)}} \cdot \cos(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin \sqrt{\sin(\tan x)} \cdot \cos(\tan x)}{2 \cos^2 x \sqrt{\sin(\tan x)}}$$

$$74. f(x) = \tan(x \cos 3x), \text{ dus} \\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x \cos 3x)} \cdot (1 \cdot \cos 3x + x \cdot -3 \sin 3x) = \frac{\cos 3x - 3x \sin 3x}{\cos^2(x \cos 3x)}$$

$$75. f(x) = \sin^2(3x + 4)^5 \Rightarrow \\ f'(x) = 2 \sin(3x + 4)^5 \cdot \cos(3x + 4)^5 \cdot 5(3x + 4)^4 \cdot 3 = 15(3x + 4)^4 \sin 2(3x + 4)^5$$

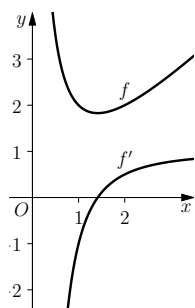
$$76. \text{ Stel het quotiënt is } \frac{f}{g} = fg^{-1}. \text{ De productregel zegt:}$$

$$\left[fg^{-1}\right]' = f'g^{-1} + f\left(g^{-1}\right)'$$

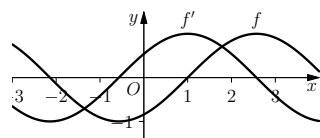
Vanwege de kettingregel is $(g^{-1})' = -1g^{-2} \cdot g'$. Dus

$$[fg^{-1}]' = f'g^{-1} + f \cdot -1g^{-2} \cdot g' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

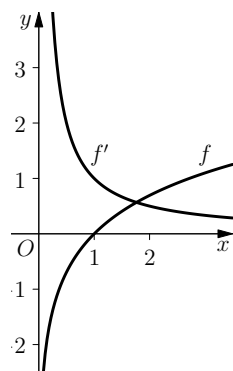
77.



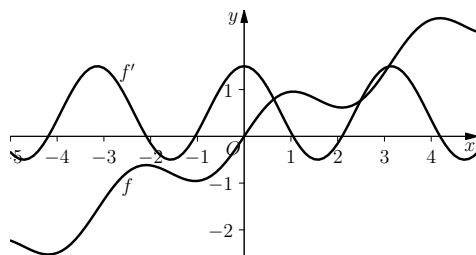
(a)



(b)



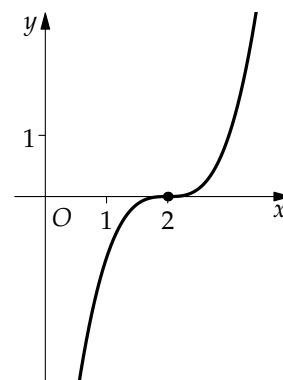
(c)



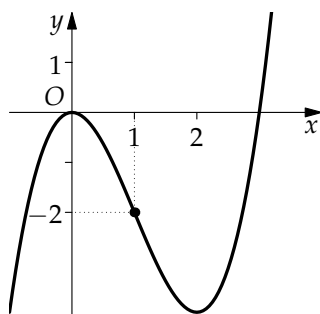
(d)

78. $f'(x) = 3(x-2)^2$ en dus is $f''(x) = 6(x-2) = 6x - 12$. De tweede afgeleide is een lineaire functie die van teken wisselt van min naar plus bij het nulpunt $x = 2$. Dus heeft f een buigpunt in $(2, f(2)) = (2, 0)$, en is concaaf op $(-\infty, 2)$ en convex op $(2, \infty)$. Zie figuur 14.1.

79. $f'(x) = 3x^2 - 6x$ en dus is $f''(x) = 6x - 6$. De tweede afgeleide wisselt bij het nulpunt $x = 1$ van teken van min naar plus, dus heeft f een buigpunt in $(1, f(1)) = (1, -2)$ en is concaaf op $(-\infty, 1)$ en convex op $(1, \infty)$. Zie figuur 14.2.



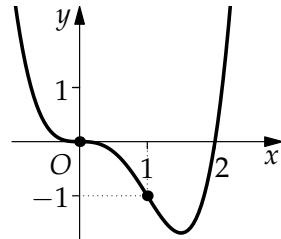
Figuur 14.1: $y = (x-2)^3$



Figuur 14.2: $y = x^3 - 3x^2$

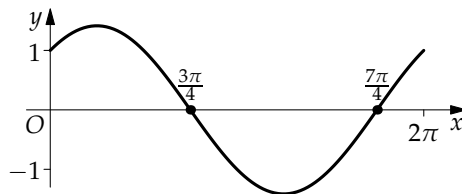
80. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ en $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$. De grafiek van de tweede afgeleide is een dalparabool. f'' wisselt twee keer

van teken, bij $x = 0$ van plus naar min en bij $x = 1$ van min naar plus. Dus heeft f twee buigpunten, in $(0, 0)$ en in $(1, -1)$, en is convex op $(-\infty, 0)$ en $(1, \infty)$, en concaaf op $(0, 1)$. Zie figuur 14.3.

Figuur 14.3: $y = x^4 - 2x^3$

81. $f'(x) = \cos x + -\sin x$ en $f''(x) = -\sin x - \cos x$. Uit $f''(x) = 0$ volgt $\sin x = -\cos x$. Dit is het geval* bij $x = \frac{3}{4}\pi$ en bij $x = \frac{7}{4}\pi$, en de tweede afgeleide wisselt daar van teken, van min naar plus naar min. Dus heeft f buigpunten in $(\frac{3}{4}\pi, 0)$ en $(\frac{7}{4}\pi, 0)$ en is f concaaf op $(0, \frac{3}{4}\pi)$ en op $(\frac{7}{4}\pi, 2\pi)$ en convex op $(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$. Zie figuur 14.4.

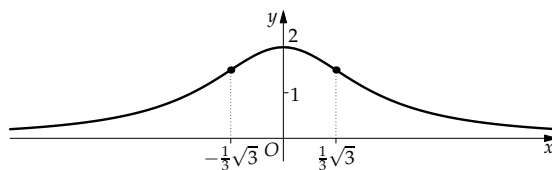
* Volgens de definitie is de cosinus de projectie op de x -as, en de sinus de projectie op de y -as in de eenheids-cirkel. Deze projecties kunnen alleen gelijk zijn bij hoeken van 45° met de x -as.

Figuur 14.4: $y = \sin x + \cos x$

$$82. f'(x) = -2(x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x^2 + 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-4(x^2 + 1) + 16x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{12x^2 - 4}{(x^2 + 1)^3}$$

De noemer van f'' is altijd positief. De nulpunten en het teken van f'' worden bepaald door de teller. De nulpunten: $12x^2 = 4$, dus $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. In deze punten wisselt f'' van teken van plus naar min naar plus, en dus heeft f buigpunten in $B_1 = (\frac{1}{3}\sqrt{3}, f(\frac{1}{3}\sqrt{3})) = (\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}) \approx (0.577, \frac{3}{2})$ en in $B_2 = (-\frac{1}{3}\sqrt{3}, f(-\frac{1}{3}\sqrt{3})) = (-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}) \approx (-0.577, \frac{3}{2})$. f is convex op $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ en op $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty)$, en concaaf op $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$. Zie figuur 14.5.

Figuur 14.5: $y = \frac{2}{x^2 + 1}$

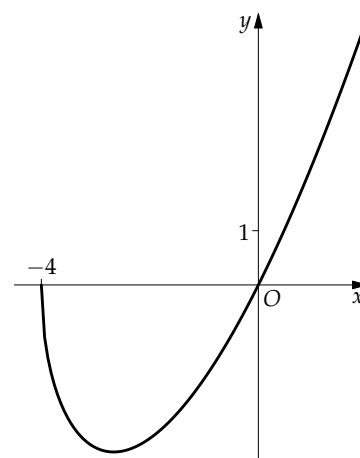
83. f heeft alleen betekenis voor $x \geq -4$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{x+4} + x \cdot \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x+4} + \frac{x}{2\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{2(x+4) + x}{2\sqrt{x+4}} = \frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}} \end{aligned}$$

De afgeleide bestaat voor $x > -4$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3 \cdot 2\sqrt{x+4} - (3x+8) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}}}{4(x+4)} \\ &= \frac{6\sqrt{x+4} - \frac{3x+8}{\sqrt{x+4}}}{4(x+4)} = \frac{6(x+4) - (3x+8)}{4(x+4)\sqrt{x+4}} = \frac{3x+16}{4(x+4)\sqrt{x+4}} \end{aligned}$$

Voor $x > -4$ is de noemer van f'' positief, en ook de teller is positief (nulpunt van f'' is het nulpunt van de teller: $3x+16=0$, dus $x = -5\frac{1}{3}$; dit punt valt buiten het domein van f). Dus voor $x > -4$ is $f''(x) > 0$, en daarom is f overall convex. Zie figuur 14.6.



Figuur 14.6: $y = x\sqrt{x+4}$

84. Een willekeurige derdegraadsfunctie heeft de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, met $a \neq 0$. Dan geldt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ en $f''(x) = 6ax + 2b$.

De tweede afgeleide is een lineaire functie, waarvan de grafiek geen horizontale lijn is, wegens $a \neq 0$. Dus heeft f'' een snijpunt met de x -as (bij $x = -\frac{b}{3a}$), waarbij f'' van teken wisselt, en heeft f daar een buigpunt.

85. $f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x + 2x \ln x$.

86. $f(x) = \ln 2x = \ln 2 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

87. $f(x) = \ln^2 x = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$.

88. $f(x) = \ln x^2 = \ln x + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$.

89. $f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$.

90. $f(x) = \ln(3x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x+1} \cdot 3 = \frac{3}{3x+1}$.

91. $f(x) = \ln(x+1)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot 2(x+1) \cdot 1 = \frac{2}{x+1}$

92. $f(x) = \ln^2(3x+1) \Rightarrow f'(x) = 2 \ln(3x+1) \cdot \frac{1}{(3x+1)^2} \cdot 2(3x+1) \cdot 3 = \frac{12 \ln(3x+1)^2}{3x+1}$

93. a. Stel $y = \cos x$, dan is $\frac{dy}{dx} = -\sin x$. En verder geldt dat $x = \arccos y$. Merk op dat de arccosinus nu een functie van y is, en dat zijn afgeleide $\frac{dx}{dy}$ is.

Met (6.7) volgt:

$$\frac{d}{dy} [\arccos y] = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} \quad (14.1)$$

Er moet dus gelden dat $\sin x \neq 0$. Uit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ volgt $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ en dus is

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Om te voorkomen dat $\sin x$ nul wordt, moet $\cos x$ ongelijk ± 1 zijn. De inverse cosinus (zie paragraaf 4.26) is gedefinieerd voor $x \in [0, \pi]$. Als je dit interval beperkt tot $< 0, \pi >$ is $\cos x$ ongelijk aan ± 1 en krijg je precies een interval waarop $\sin x$ positief is. Dus geldt op dit interval:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Wegens $y = \cos x$ is dus $\sin x = \sqrt{1 - y^2}$. Dit invullen in (14.1) levert:

$$\frac{d}{dy} [\arccos y] = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}}$$

Hieruit volgt dat $\frac{d}{dx} [\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in < -1, 1 >$.

- b. Uit opgave 69 van hoofdstuk 4 volgt $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Dus $\frac{d}{dx} [\arcsin x + \arccos x] = 0$.

Dus ook is $\frac{d}{dx} [\arcsin x] + \frac{d}{dx} [\arccos x] = 0$.

Vanwege $\frac{d}{dx} [\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ volgt $\frac{d}{dx} [\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

94. a. f even betekent dat $f(x) = f(-x)$. Neem van beide kanten de afgeleide (die zijn dan ook aan elkaar gelijk):

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x)$$

en

$$\frac{d}{dx} [f(-x)] = f'(-x) \cdot -1 = -f'(-x)$$

Dus $f'(x) = -f'(-x)$. Dus per definitie is f' oneven.

- b. f oneven betekent dat $f(x) = -f(-x)$. Neem van beide kanten de afgeleide (die zijn dan ook aan elkaar gelijk):

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x)$$

en

$$\frac{d}{dx} [-f(-x)] = -f'(-x) \cdot -1 = f'(-x)$$

Dus $f'(x) = f'(-x)$. Dus per definitie is f' even.

95. Stel het quotiënt is $\frac{f}{g} = fg^{-1}$. De productregel zegt:

$$[fg^{-1}]' = f'g^{-1} + f(g^{-1})'$$

Vanwege de kettingregel is $(g^{-1})' = -1g^{-2} \cdot g'$. Dus

$$[fg^{-1}]' = f'g^{-1} + f \cdot -1g^{-2} \cdot g' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

96. a. Wegens stelling 1.35 is $^{10}\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$
 Omdat $\frac{1}{\ln 10}$ een constante is, volgt met de scalairregel dat de afgeleide hiervan gelijk is aan $\frac{1}{x \cdot \ln 10}$

b. Wegens stelling 1.35 is $^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$
 Omdat $\frac{1}{\ln a}$ een constante is, volgt met de scalairregel dat de afgeleide gelijk is aan $\frac{1}{x \cdot \ln a}$

97. $f(x) = \arcsin(2x + 3) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2 - 12x - 9}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4(-x^2 - 3x - 2)}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}} \end{aligned}$$

98. $f(x) = \arcsin x + \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$
 (Zie ook de uitwerking van opgave 93b)

99. $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \arccos x + \arcsin x \cdot -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (\arccos x - \arcsin x)$$

100. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \arccos x - \arcsin x \cdot -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\arccos^2 x} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (\arccos x + \arcsin x)}{\arccos^2 x} = \text{zie opgave 69 van hoofdstuk 4} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{\pi}{2}}{\arccos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2} \arccos^2 x} \end{aligned}$$

101. $f(x) = \arctan^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \arctan x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{2 \arctan x}{1 + x^2}$

102. $f(x) = \arctan x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^4}$

103. $f(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} x)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4 + x^2}$

104. $f(x) = \arccos(\arctan x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \arctan^2 x}} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$

105. $f(x) = \arcsin^2(2x + 3) \Rightarrow$

$$f'(x) = 2 \arcsin(2x + 3) \cdot [\arcsin(2x + 3)]' = \text{zie opgave 97} = \frac{2 \arcsin(2x + 3)}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}$$

106. $f(x) = \arcsin(2x + 3)^2 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - [(2x + 3)^2]^2}} \cdot 2(2x + 3) \cdot 2 = \frac{4(2x + 3)}{\sqrt{1 - (2x + 3)^4}}$$

$$107. f(x) = \arcsin^2(2x+3)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \arcsin(2x+3)^2 \cdot [\arcsin(2x+3)^2]' = \text{zie opgave 106} \\ &= \frac{8(2x+3) \arcsin(2x+3)^2}{\sqrt{1-(2x+3)^4}} \end{aligned}$$

Uitwerkingen hoofdstuk 7

1. i. Het domein is $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

ii. Snijpunt x -as: $(1, 0)$, met de y -as: $(0, \frac{1}{2})$

iii. f is niet even, oneven of periodiek.

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

dus is $y = 1$ horizontale asymptoot voor $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{Verder is } \lim_{x \downarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = +\infty \text{ en } \lim_{x \uparrow 2} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$$

v. Met synthetisch delen volgt $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$. Dus $f(x) = 1 + (x-2)^{-1}$

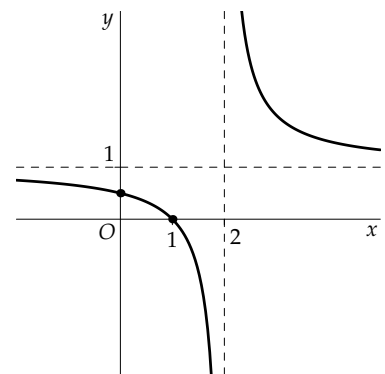
$$\text{en daaruit volgt } f'(x) = -(x-2)^{-2} = \frac{-1}{(x-2)^2} \text{ Omdat}$$

$f'(x) < 0$ voor alle $x \neq 2$, is f op het hele domein een dalende functie; er is geen maximum of minimum

vi. Uit $f'(x) = -(x-2)^{-2}$ volgt $f''(x) = 2(x-2)^{-3}$

f'' bestaat niet in $x = 2$, maar wisselt daar wel van teken (van min naar plus), dus f gaat over van concaaf naar convex

Zie figuur 15.1.



Figuur 15.1: $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

2. i. Het domein is $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ii. Snijpunt x -as: $(1, 0)$, met de y -as: $(0, -1)$

iii. f is niet even, oneven of periodiek.

iv. Met synthetisch delen volgt $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$, en $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$,

dus is $y = 1$ horizontale asymptoot voor $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{Verder is } \lim_{x \downarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ en } \lim_{x \uparrow -1} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$$

v. Uit $f(x) = 1 - 2(x+1)^{-1}$ volgt $f'(x) = 2(x+1)^{-2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

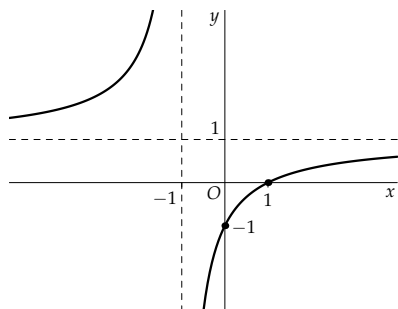
Omdat $f'(x) > 0$ voor alle $x \neq -1$, is f op het hele domein een stijgende functie; er is geen maximum of minimum

vi. Uit $f'(x) = 2(x+1)^{-2}$ volgt $f''(x) = -4(x+1)^{-3}$

f'' bestaat niet in $x = -1$, maar wisselt daar wel van teken (van plus naar min), dus f gaat over van convex naar concaaf

Zie figuur 15.2.

3. i. Het domein is $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Figuur 15.2: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

ii. Voor snijpunten met de x -as moet gelden: $x^2 + 5 = 0$, dit heeft geen oplossing. Snijpunt met de y -as: $(0, -2\frac{1}{2})$

iii. Geen symmetrie

iv. Met synthetisch delen volgt $f(x) = x + 2 + \frac{9}{x-2}$.

Dus $y = x + 2$ is een scheve asymptoot voor $x \rightarrow \pm\infty$.

Verder is $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = +\infty$ en $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$

v. Uit $f(x) = 1 + 9(x-2)^{-1}$ volgt

$$f'(x) = 1 - 9(x-2)^{-2} = 1 - \frac{9}{(x-2)^2}$$

Uit $1 - \frac{9}{(x-2)^2} = 0$ volgt $(x-2)^2 = 9$, dus $x-2 = \pm 3$,

oftewel $x = -1$ of $x = 5$. Tekenoverzicht van f' is

$+$ $+$ (-1) $-$ (5) $+$ $+$

Dus heeft f een maximum bij $x = -1$ en een minimum bij

$x = 5$. $f(-1) = -2$ en $f(5) = 10$.

vi. Uit $f'(x) = 1 - 9(x-2)^{-2}$ volgt $f''(x) = 18(x-2)^{-3}$

f'' bestaat niet in $x = 2$, maar wisselt daar wel van teken (van min naar plus), dus f gaat over van concaaf naar convex

Zie figuur 15.3.

4. i. Het domein is $\mathbb{R}$

ii. Voor snijpunten met de x -as moet gelden: $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$. Stel $x^2 = t$. Dan moet gelden $t^2 - 4t + 4 = 0$, oftewel $(t-2)^2 = 0$, dus $t = 2$. Uit $x^2 = 2$ volgt $x = \pm\sqrt{2}$. Dit zijn de nulpunten. Snijpunt met de y -as: $(0, 4)$

iii. Er geldt: $f(-x) = f(x)$, dus is f een even functie.

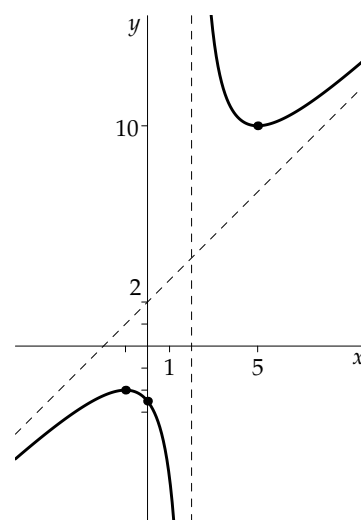
iv. Er zijn geen asymptoten. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

v. $f'(x) = 4x^3 - 8x$. Uit $f'(x) = 0$ volgt $x(x^2 - 2) = 0$, dus $x = 0$ of $x = \pm\sqrt{2}$. Tekenoverzicht van f' is

$-$ $-$ $(-\sqrt{2})$ $+$ $+$ (0) $-$ $-$ $(\sqrt{2})$ $+$ $+$

Dus heeft f een maximum bij $x = 0$, dit is ook het snijpunt met de y -as, en minima bij $x = \pm\sqrt{2}$, dit zijn ook de nulpunten.

vi. $f''(x) = 12x^2 - 8$. Uit $f''(x) = 0$ volgt $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0.816$.

Figuur 15.3: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$

De grafiek van f'' is een dalparabool die bij deze punten van teken wisselt. Dus daar bevinden zich de buigpunten van f .

Zie figuur 15.4.

5. i. Het domein is $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

ii. Voor snijpunten met de x -as moet gelden: $x^2 - 5 = 0$, dus $x = \pm\sqrt{5}$. Snijpunt met de y -as: $(0, \frac{5}{4})$.

iii. Er geldt: $f(-x) = f(x)$, dus is f een even functie.

iv. Met een staartdeling volgt $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 - 4}$

Dus $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, dat wil zeggen dat $y = 1$ een horizontale asymptoot voor $x \rightarrow \pm\infty$.

Er zijn twee verticale asymptoten bij $x = \pm 2$:

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = -\infty = \lim_{x \uparrow -2} f(x) \text{ en } \lim_{x \uparrow 2} f(x) = +\infty = \lim_{x \downarrow -2} f(x)$$

v. Uit $f(x) = 1 - (x^2 - 4)^{-1}$ volgt

$$f'(x) = (x^2 - 4)^{-2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 - 4)^2}$$

Uit $f'(x) = 0$ volgt $x = 0$. Tekenovertzicht van f' is $- \quad - \quad (0) \quad + \quad +$

Dus heeft f een minimum bij $x = 0$. Er geldt $f(0) = \frac{5}{4}$

vi. Met de quotiëntregel volgt

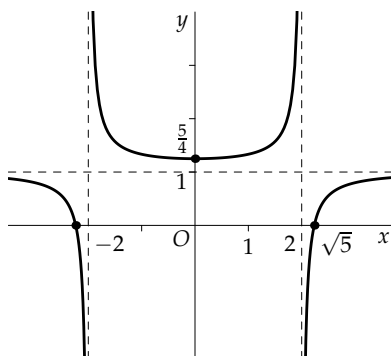
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cdot (x^2 - 4)^2 - 2x \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 8 - 8x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{-6x^2 - 8}{(x^2 - 4)^3} \end{aligned}$$

De noemer van f'' is negatief voor alle x , dus heeft f'' geen nulpunten, en f geen buigpunten. f'' wisselt wel van teken:

$- \quad - \quad (-2) \quad + \quad + \quad (2) \quad - \quad -$

Dus f gaat bij -2 over van concaaf naar convex, en bij $+2$ omgekeerd.

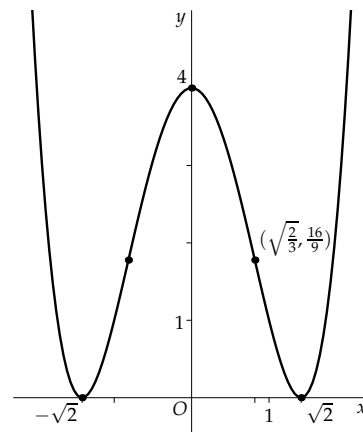
Zie figuur 15.5.



Figuur 15.5: $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 4}$

6. i. Het domein is $\mathbb{R}$.

ii. Er geldt: $f(x) > 0$; er zijn geen nulpunten. Verder is $f(0) = 1$, dus $(0, 1)$ is het snijpunt met de y -as.



Figuur 15.4: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

- iii. $f(-x) = f(x)$, dus is f even.
- iv. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. Er zijn geen asymptoten.
- v. $f'(x) = 2xe^{x^2}$. Uit $f'(x) = 0$ volgt $x = 0$ en $f'(x)$ wisselt van min naar plus bij $x = 0$. Dus gaat f over van dalend naar stijgend bij $x = 0$.
- vi. Met de productregel volgt $f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$. Hieruit blijkt dat $f''(x) > 0$ voor alle x , dus heeft f geen buigpunten en is f overall convex.

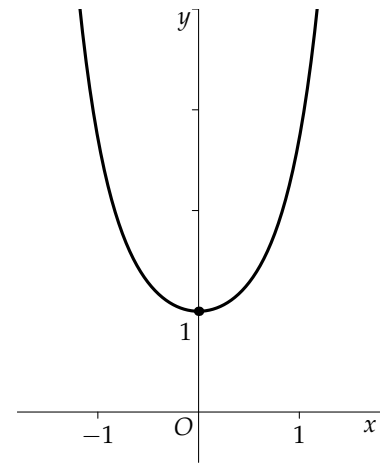
Zie figuur 15.6.

- 7. i. Het domein is $\mathbb{R}$.
- ii. Uit $f(x) = 0$ volgt $x = 0$. Dus $(0,0)$ is het enige nulpunt, en dit is tevens het snijpunt met de y -as.
- iii. $f(-x) = -f(x)$, dus is f oneven.
- iv. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. Er zijn geen asymptoten.
- v. Uit $f(x) = xe^{x^2}$ volgt $f'(x) = e^{x^2}(1 + 2x^2)$ (vergelijk onderdeel f uit opgave 6). Er geldt $f'(x) > 0$ voor alle x , dus is f een stijgende functie.
- vi. Met de productregel volgt $f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x(1 + 2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2}(2x^2 + 3)$. f'' heeft een nulpunt bij $x = 0$, en wisselt daar van teken (van min naar plus), dus f heeft een buigpunt bij $x = 0$ en gaat over van concaaf naar convex.

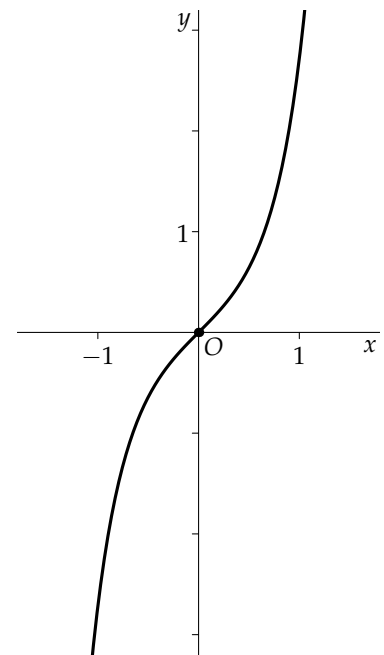
Zie figuur 15.7.

- 8. i. Het domein is $\mathbb{R}$.
- ii. Uit $f(x) = 0$ volgt $x = 0$. Dus $(0,0)$ is het enige nulpunt, en dit is tevens het snijpunt met de y -as.
- iii. $f(-x) = -f(x)$, dus is f oneven.
- iv. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Dus de x -as is horizontale asymptoot in beide richtingen.
- v. $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$.

De noemer is altijd groter dan nul. Er geldt $f'(x) = 0$ als de teller nul is. Uit $-4x^2 + 4 = 0$ volgt $4x^2 = 4$ oftewel $x = \pm 1$. De teller wisselt hier van teken, en dus ook f' . Er geldt $f(1) = 2$ en $f(-1) = -2$. Dus f heeft een maximum in $(1, 2)$ en een minimum in $(-1, -2)$.



Figuur 15.6: $f(x) = e^{x^2}$

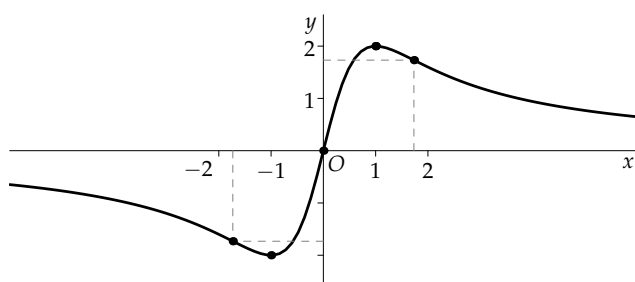


Figuur 15.7: $f(x) = xe^{x^2}$

vi.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(-8x)(x^2+1)^2 - (-4x^2+4)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{(-8x)(x^2+1)^2 + 16x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{8x(x^2+1) \cdot [-(x^2+1) + 2(x^2-1)]}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{8x(x^2+1) \cdot [x^2-3]}{(x^2+1)^4}
 \end{aligned}$$

De noemer is altijd groter dan nul. $f''(x) = 0$ als de teller nul is. Dit is het geval bij $x = 0$ en bij $x = \pm\sqrt{3}$. f'' wisselt daar ook van teken, en dus heeft f drie buigpunten bij $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(0,0)$ en $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Zie figuur 15.8.

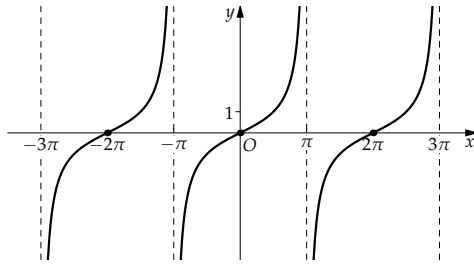


Figuur 15.8: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

9. i. De functie is niet gedefinieerd als de noemer gelijk aan nul is. Uit $1 + \cos x = 0$ volgt $\cos x = -1$, dat is het geval bij $x = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Het domein is $\mathbb{R} \setminus \{x \mid x = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ii. Snijpunten met de x -as volgen uit $\sin x = 0$, dus $x = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Snijpunt met de y -as: $(0,0)$.
- iii. Zowel $\sin x$ als $\cos x$ hebben periode 2π , en dat geldt ook voor f .
- iv. Eigenschap 16b uit paragraaf 4.13 zegt dat $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.
Dus is $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$.
Eigenschap 15 uit diezelfde paragraaf zegt dat $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.
Dus is $\sin x = 2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$.
Dus $f(x) = \frac{2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}{2\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} = \tan \frac{1}{2}x$. De functie $y = \tan x$ heeft verticale asymptoten bij $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dus heeft f verticale asymptoten bij $\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, oftewel bij $x = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- v. De tangens heeft geen maxima of minima.
- vi. $y = \tan x$ heeft buigpunten bij $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dus heeft $f(x) = \tan \frac{1}{2}x$ buigpunten bij $x = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zie figuur 15.9.

10. i. Stel $p(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Dit is de functie die in opgave 2 is onder-

Figuur 15.9: $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

zoekt. Nu geldt: $f(x) = \arcsin p(x)$. Het domein van $\arcsin x$ is $[-1, 1]$. Dus moet gelden: $-1 \leq p(x) \leq 1$. Uit de grafiek bij opgave 2 blijkt dat dit het geval is voor $x \geq 0$. Dus het domein van f is $[0, \infty)$.

- ii. $\arcsin p(x) = 0$ als $p(x) = 0$, dus als $x - 1 = 0$ oftewel als $x = 1$. Dus $(1, 0)$ is het enige nulpunt. Snijpunt met de y -as: $f(0) = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$, dus $(0, -\frac{\pi}{2})$.
- iii. f is niet even, oneven of periodiek.
- iv. Uit opgave 2 blijkt dat $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 1$, dus is $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin p(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Dus heeft f een horizontale asymptoot $y = \frac{\pi}{2}$ voor $x \rightarrow \infty$. De overige asymptoten die in opgave 2 een rol spelen, vallen buiten het domein van f .
- v. Met de kettingregel volgt uit $f(x) = \arcsin p(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-p^2(x)}} \cdot p'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4x}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{x+1}\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vanwege het domein van f is $x \geq 0$. De afgeleide bestaat niet voor $x = 0$, maar wel voor $x > 0$. Als $x > 0$, is ook $x + 1 > 0$.

Voor $x > 0$ is $f'(x) > 0$, dus is f een stijgende functie.

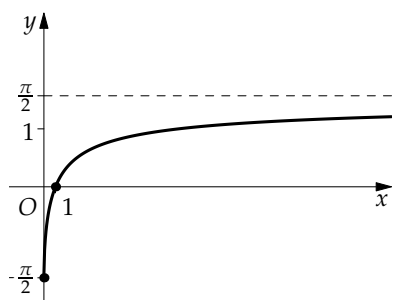
- vi. Uit $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} = (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-1}$ volgt

$$f''(x) = -(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x\sqrt{x} + \sqrt{x})^2}$$

Voor $x > 0$ is $f''(x) < 0$, dus is f concaaf op $(0, \infty)$.

Zie figuur 15.10.

- 11. i. Het domein is $\mathbb{R}$.
- ii. Er geldt: $f(x) > 0$; er zijn geen nulpunten. Verder is $f(0) = 1$, dus $(0, 1)$ is het snijpunt met de y -as.
- iii. $f(-x) = f(x)$, dus is f even.
- iv. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. De x -as is horizontale asymptoot.


 Figuur 15.10: $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$

- v. $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. Uit $f(x) = 0$ volgt $x = 0$ en $f'(x)$ wisselt van plus naar min bij $x = 0$. Dus heeft f een maximum bij $x = 0$.

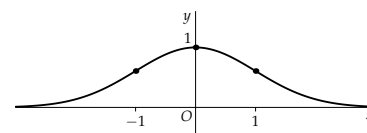
- vi. Met de productregel volgt
 $f''(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-xe^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^2 - 1)$

$$f''(x) = 0 \text{ voor } x = \pm 1.$$

Tekenoverzicht van f'' is $+$ $+$ (-1) $-$ (1) $+$ $+$

Dus f gaat bij $x = -1$ over van convex naar concaaf, en bij $x = 1$ omgekeerd.

Zie figuur 15.11.


 Figuur 15.11: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

12. a. i. Het domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 ii. Uit $f(x) = 0$ volgt $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26$. Dus $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ is het enige nulpunt. Er is geen snijpunt met de y -as.
 iii. f is niet even, oneven of periodiek.

- iv. Er geldt $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. De x -as is verticale asymptoot:

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0 - \infty = -\infty, \text{ en } \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 + \infty = \infty.$$

Merk op dat voor grote waarden van x : $f(x) \approx x^2$.

Verder is $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. Er is geen horizontale asymptoot.

Wegens $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{2}{x^2} = \pm\infty$ heeft f ook geen schuine asymptoot.

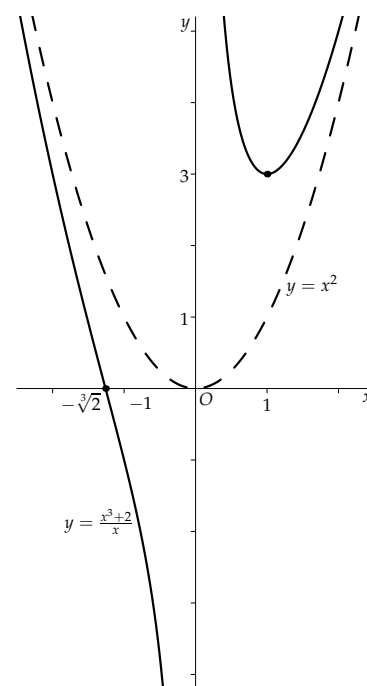
$$v. f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}.$$

De noemer is altijd groter dan nul. Er geldt $f'(x) = 0$ als de teller nul is, en dat is bij $x = 1$. De teller wisselt daar van teken (van min naar plus) dus heeft f een minimum in $(1, 3)$.

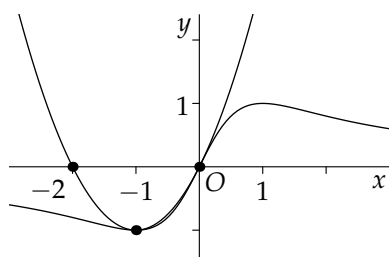
$$vi. f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 + 4}{x^3}.$$

Er geldt $f'(x) = 0$ als de teller nul is, dat is bij $x = -\sqrt[3]{2}$ (dit is ook het nulpunt). En f'' wisselt daar van teken (van plus naar min), dus gaat f in het nulpunt over van convex naar concaaf.

- b. Zie figuur 15.12.


 Figuur 15.12: $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$ en $g(x) = x^2$

- c. Stel $f(x) = g(x)$. Dan is $\frac{x^3+2}{x} = x^2$, dus $x^3+2 = x^3$, oftewel $0 = 2$. Er is geen oplossing, dus hebben f en g geen snijpunten.
13. a. De grafiek van f is vrijwel dezelfde als die van de functie uit opgave 8, slechts de y -waarden zijn gehalveerd. De grafiek van g is een dalparabool met nulpunten bij $x = -2$ en $x = 0$. Zie figuur 15.13



Figuur 15.13: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ en $g(x) = x^2 + 2x$

De snijpunten van g en f volgen uit $g(x) = f(x)$. Dat wil zeggen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= \frac{2x}{x^2 + 1} \\ (x^2 + 2x)(x^2 + 1) &= 2x \\ x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x &= 2x \\ x^4 + 2x^3 + x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 + 2x + 1) &= 0 \\ x^2(x + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dus g en f hebben snijpunten bij $x = 0$ en $x = -1$.

- b. Duidelijk is dat $x^2(x+1)^2 \geq 0$ voor alle x . Wanneer je de berekening van de snijpunten in de omgekeerde volgorde uitvoert, krijg je het gewenste resultaat:

$$\begin{aligned} x^2(x+1)^2 &\geq 0 \\ x^2(x^2 + 2x + 1) &\geq 0 \\ x^4 + 2x^3 + x^2 &\geq 0 \\ x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x &\geq 2x \\ (x^2 + 2x)(x^2 + 1) &\geq 2x \\ \text{dus geldt, wegens } x^2 + 1 > 0 & \\ x^2 + 2x &\geq \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Oftewel $g(x) \geq f(x)$ voor alle x .

- | | |
|---|---|
| 14. $d \sin x = \cos x \, dx$ | 17. $d e^x = e^x \, dx$ |
| 15. $d \cos x = -\sin x \, dx$ | 18. $dx^3 = 3x^2 \, dx$ |
| 16. $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$ | 19. $d \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ |

20. $dy = (4x + 3) dx$

23. $dg(t) = (1 + 2t) dt$

21. $df(x) = e^x dx$

24. $dy = (\sin x + x \cos x) dx$

22. $dy = \frac{2}{\cos^2 2x} dx$

25. $df(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

26. Er geldt $f(x + dx) \approx f(x) + df = f(x) + f'(x) dx$.

Toegepast op $f(x) = \sqrt{x}$ levert dat: $\sqrt{x + dx} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Voor $x = 16$ en $dx = 0.2$ wordt dat:

$$\sqrt{16.2} = \sqrt{16 + 0.2} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0.2 = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0.2 = 4.025$$

De rekenmachine geeft $\sqrt{16.2} = 4.02492\dots$, het verschil is minder dan 0.0001.

27. $\sin(0.1) = \sin(0 + 0.1) \approx \sin(0) + \cos(0) \cdot 0.1 = 0 + 1 \cdot 0.1 = 0.1$

De rekenmachine geeft $\sin 0.1 = 0.0998\dots$, een verschil minder dan 0.0002.

28. $x dx = d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

33. $\sqrt{x} dx = d\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

29. $x^2 dx = d\left(\frac{1}{3}x^3\right)$

34. $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = d(2\sqrt{x})$

30. $(2x^2 + 1) dx = d\left(\frac{2}{3}x^3 + x\right)$

35. $\frac{1}{x^2} dx = d\left(-\frac{1}{x}\right)$

31. $\sin x dx = d(-\cos x)$

36. $-\sin 2x dx = d\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

32. $\cos x dx = d \sin x$

37. Noem de gezochte getallen a en b . Dan geldt $a - b = 10$, dus $b = a - 10$. De opgave is: minimaliseer $a \cdot b$, dus minimaliseer $a(a - 10)$. Stel $f(a) = a(a - 10)$. De grafiek van f is een dalparabool met nulpunten bij $a = 0$ en $a = 10$. Het minimum bevindt zich dus bij $a = 5$ (en is gelijk aan -25). Dus $a = 5$ en $b = -5$. Alternatieve oplossing: Noem de getallen x en $x - 10$. Dan is het product $f(x) = x(x - 10) = x^2 - 10x$. De afgeleide is $f'(x) = 2x - 10$. Uit $f'(x) = 0$ volgt $x = 5$. Het minimum is $f(5) = 5 \cdot -5 = -25$.

38. Noem de getallen a en b . De opdracht is: minimaliseer $a + b$, onder de voorwaarden dat $a, b > 0$ en $ab = 9$. Uit dit laatste volgt $b = \frac{9}{a}$. Dus minimaliseer $a + b = a + \frac{9}{a}$. Stel $f(a) = a + \frac{9}{a}$. Uit $f'(a) = 0$ volgt $f'(a) = 1 - \frac{9}{a^2} = 0$, dus $a^2 = 9$ en $a = \pm 3$. Het gaat om $a > 0$, dus bekijk $a = 3$. Links van 3 is $f'(a)$ negatief, rechts van 3 positief. Dus heeft f inderdaad een minimum bij $a = 3$. Uit $b = \frac{9}{a}$ volgt dat ook $b = 3$.

39. Tegel.

a. De driehoeken PBQ en RDS vormen samen een rechthoek van 8 bij 4 cm. De driehoeken APS en QCR vormen samen een vierkant van 2 bij 2 cm. De oppervlakte van het parallelogram is dus $10 \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^2$.

- b. De driehoeken PBQ en RDS vormen samen een rechthoek van $10 - x$ bij $6 - x$ cm. De driehoeken APS en QCR vormen samen een vierkant van x bij x cm. De oppervlakte van het parallellogram is dus $10 \cdot 6 - (10 - x)(6 - x) - x^2 = 60 - (60 - 16x + x^2) - x^2 = 16x - 2x^2 \text{ cm}^2$.
- c. De oppervlakte van het parallellogram wordt gegeven door $f(x) = 16x - 2x^2$. De grafiek van f is een bergparabool. f heeft een maximum als $f'(x) = 0$, dus als $16 - 4x = 0$, dus als $x = 4$.
- d. Het maximum van f is $f(4) = 16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = 32$. De maximale oppervlakte van $PQRS$ is dus 32 cm^2 .

40. Doos.

- a. De inhoud van de doos is $I(x) = l \cdot b \cdot h$, met $l = 20 - 2x$, $b = 12 - 2x$ en $h = x$. Dus $I(x) = (20 - 2x)(12 - 2x)x = 4x^3 - 64x^2 + 240x$
- b. De formule heeft betekenis als alle zijden van de doos (l , b en h) positief zijn. Dus als $x > 0$, $20 - 2x > 0$ en $12 - 2x > 0$. Beide laatste eisen leiden tot $x < 10$ en $x < 6$. Realistische waarden voor x liggen dus in het interval $(0, 6)$.
- c. Los de vergelijking $I(x) = 180$ op. Dus $4x^3 - 64x^2 + 240x = 180$, oftewel $x^3 - 16x^2 + 60x - 45 = 0$. Een aantal waarden proberen, zoals $x = \pm 1$ of $x = \pm 3$, leidt tot het inzicht dat $x = 1$ een oplossing is. Alternatief is een grafiek te tekenen van $f(x) = x^3 - 16x^2 + 60x - 45$. Daarin is snel te zien dat $x = 1$ een nulpunt is. Met een synthetisch delen (of een staartdeling) volgt: $x^3 - 16x^2 + 60x - 45 = (x - 1)(x^2 - 15x + 45)$. Oplossen van $x^2 - 15x + 45 = 0$ levert $x_{1,2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ als nulpunten.
 $x_1 = \frac{15+3\sqrt{5}}{2} \approx 10.85$, deze waarde valt buiten het interval $(0, 6)$.
 $x_2 = \frac{15-3\sqrt{5}}{2} \approx 4.15$. Dus $I(x) = 180$ voor $x = 1 \vee x = \frac{15-3\sqrt{5}}{2} \approx 4.15$.
- d. Los $I'(x) = 0$ op om de punten met horizontale raaklijn te vinden. $I'(x) = 12x^2 - 128x + 240 = 0$, oftewel $3x^2 - 32x + 60 = 0$, dus de nulpunten van I' zijn $x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{304}}{6} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{3}$. De grafiek van I' is een dalparabool, die positieve waarden links, en negatieve waarden rechts van $x = \frac{16-2\sqrt{19}}{3} \approx 2.43$ heeft. Dus I heeft bij deze waarde van x een maximum.

41. Bruine bonen. Het volume van het blik is gegeven in milliliter, de afmetingen moet je geven in een lengtemaat, bijvoorbeeld centimeter, dus is het handig ml in cm^3 om te zetten: $1000 \text{ ml} = 1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$. Dus $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$ en $750 \text{ ml} = 750 \text{ cm}^3$.

De onder- en bovenkant van het blik zijn cirkels met een oppervlakte πr^2 . De omtrek van de cirkels is $2\pi r$. De zijkant van het blik is dus een rechthoek met lengte $2\pi r$ en hoogte h . De opper-

vlakke van de zijkant is dus $2\pi rh$. De totale oppervlakte van het materiaal van het blik is dus

$$\text{Opp}(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

De inhoud van het blik (een cilinder met grondvlak πr^2) is $\pi r^2 h$. Gegeven is dat de inhoud 750 cm^3 is. Dus $\pi r^2 h = 750$, hieruit volgt $h = \frac{750}{\pi r^2}$. Substitueer deze h in de formule voor de oppervlakte van het blik:

$$\text{Opp}(r) = 2\pi r \frac{750}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{1500}{r} + 2\pi r^2$$

Het gaat er nu om een minimum van deze functie te vinden. Dus

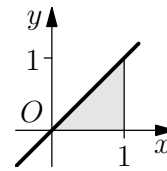
$$\text{Opp}'(r) = -\frac{1500}{r^2} + 4\pi r = 0$$

Dus $-1500 + 4\pi r^3 = 0$, dus $r^3 = \frac{375}{\pi}$, oftewel $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 4.92$.

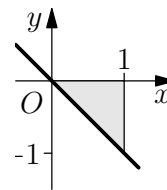
Het maken van een tekenoverzicht van de afgeleide leert dat bij deze waarde van r de oppervlaktefunctie inderdaad een minimum bereikt. En dan is $h = \frac{750}{\pi r^2} \approx 9.86$.

Uitwerkingen hoofdstuk 8

1. $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Zie figuur 16.1.
2. $\int_0^1 -x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - (-0) = -\frac{1}{2}$. Zie figuur 16.2.
3. $\int_0^1 x^2 + x \, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6}$
4. $\int_0^2 3x^2 + 2x + 1 \, dx = (x^3 + x^2 + x) \Big|_0^2 = 8 + 4 + 2 - 0 = 14$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$
6. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0)$
 $= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$
7. $\int_0^{\pi} x - \sin x \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \cos x\right) \Big|_0^{\pi}$
 $= \frac{1}{2}\pi^2 + \cos \pi - (0 + \cos 0) = \frac{1}{2}\pi^2 + (-1) - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 - 2$
8. $\int_{-1}^1 x^4 + 3 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + 3x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{5} + 3 - \left(-\frac{1}{5} - 3\right) = 6\frac{2}{5}$
9. $\frac{2}{5}x^5$
10. $\frac{1}{2}x^2 + x$
11. $\frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 7x$
12. Methode 1: Haakjes uitwerken levert $f(x) = x^2 + 2x + 1$, een primitieve is $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$.
 Methode 2: Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$, dus probeer $\frac{1}{3}(x+1)^3$ als primitieve van $(x+1)^2$. Differentiëren (met de kettingregel) van $\frac{1}{3}(x+1)^3$ levert het goede resultaat, dus is $\frac{1}{3}(x+1)^3$ een primitieve.
13. Methode 1: Haakjes uitwerken levert $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$, een primitieve is $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x$.
 Methode 2: Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$, dus probeer $\frac{1}{3}(2x+1)^3$ als primitieve van $(2x+1)^2$. Differentiëren (met de kettingregel) van $\frac{1}{3}(2x+1)^3$ levert $(2x+1)^2 \cdot 2$.
 Dit is een factor 2 te groot, dus is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^3 = \frac{1}{6}(2x+1)^3$ een primitieve van $(2x+1)^2$.
14. Methode 1: Haakjes uitwerken levert $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$, een primitieve is $3x^3 - 6x^2 + 4x$.



Figuur 16.1: De oppervlakte tussen grafiek en x-as op het interval $(0, 1]$ is $\frac{1}{2}$



Figuur 16.2: De 'oppervlakte' tussen grafiek en x-as op het interval $(0, 1]$ is $-\frac{1}{2}$

Uitwerken van de haakjes van het antwoord $\frac{1}{3}(x+1)^3$ van methode 2 levert $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3}$. Dit verschilt $\frac{1}{3}$ van het antwoord van methode 1. Dat is toegestaan, want primitieven van dezelfde functie kunnen een constante verschillen.

Methode 2: Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$, dus probeer $\frac{1}{3}(3x-2)^3$ als primitieve van $(3x-2)^2$. Differentiëren (met de kettingregel) van $\frac{1}{3}(3x-2)^3$ levert $(3x-2)^2 \cdot 3$. Dit is een factor 3 te groot, dus is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(3x-2)^3 = \frac{1}{9}(3x-2)^3$ een primitieve van $(3x-2)^2$.

15. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, een primitieve is $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$

16. $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$, een primitieve is $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}(\frac{1}{7}x^3 + 1)$

17. $f(x) = x^{-2}$, de primitieven zijn $F(x) = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

18. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}x^{-2}$, de primitieven zijn $F(x) = \frac{1}{2} \cdot -x^{-1} + C = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{2x} + C$

19. $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$, de primitieven zijn $F(x) = 3 \ln |x| + C$

20. $f(x) = x^{-2} - x^{-3}$, de primitieven zijn $F(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$

21. In figuur 16.3 zie je dat dat $f(x) = \arcsin x$ en $g(x) = -\arccos x$ dezelfde vorm hebben, en ten opzichte van elkaar in de y -richting verschoven zijn.

De verschilfunctie is $f(x) - g(x) = \arcsin x - (-\arccos x) = \arcsin x + \arccos x$. Volgens opgave 69 uit hoofdstuk 4 is dit gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$.

22. $\int \sqrt[3]{3x^2} dx = \int \sqrt[3]{3}x^{2/3} dx = \sqrt[3]{3} \int x^{2/3} dx = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{3}x^{5/3} + C$

23. Een primitieve van $\frac{1}{\sqrt{x}}$ is $2\sqrt{x}$, dus probeer $2\sqrt{x+3}$ als primitieve van $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$. Differentiëren (met de kettingregel) van $2\sqrt{x+3}$ levert het juiste resultaat, dus $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} + C$

24. Een primitieve van $x^{1/4}$ is $\frac{4}{5}x^{5/4}$, dus probeer $\frac{4}{5}(3-6x)^{5/4}$ als primitieve van $(3-6x)^{1/4}$.
De afgeleide (met de kettingregel) van $\frac{4}{5}(3-6x)^{5/4}$ is $(3-6x)^{1/4} \cdot -6$, een factor -6 te groot.
Dus $\int (3-6x)^{1/4} dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}(3-6x)^{5/4} + C = -\frac{2}{15}(3-6x)^{5/4} + C$.

25. $\int x - \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}(1-x)^{2/3} + C$

26. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

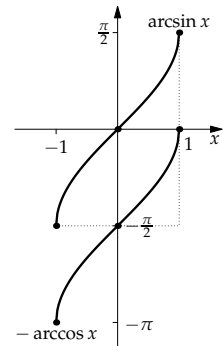
27. Volgens paragraaf 4.13, formule 10 is $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = 0 - (-1 \sin x) = \sin x$.
Dus $\int \sin 2x + \sin(\pi - x) dx = \int \sin 2x + \sin x dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x + C$

28. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

29. $\int e^x - x dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + C$

30. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

31. $\int \frac{1}{e^x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C = -\frac{1}{e^x} + C$



Figuur 16.3: Het verschil tussen $\arcsin x$ en $-\arccos x$ is $\frac{1}{2}\pi$

$$32. \int e^{x+1} + \sqrt{e^x} dx = \int e^{x+1} + e^{\frac{1}{2}x} dx = e^{x+1} + 2e^{\frac{1}{2}x} + C = e^{x+1} + 2\sqrt{e^x} + C$$

$$33. \int \frac{1}{\sqrt{e^x-2}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x+1} + C = -\frac{2}{\sqrt{e^x-2}} + C$$

$$34. \int 3x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} dx = \int 3x^2 + 4x^{-1} - 2x^{-2} dx = x^3 + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + C$$

$$35. \int \frac{3-2x+7x^2}{\sqrt{x}} dx = \int 3x^{-1/2} - 2x^{1/2} + 7x^{3/2} dx = 6x^{1/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{14}{5}x^{5/2} + C$$

$$36. \int -2\sin(\frac{1}{3}x - 2) dx = 6\cos(\frac{1}{3}x - 2) + C$$

$$37. \int 3(1 - \frac{3}{4}x)^{-3} dx = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{4}{3} \cdot 3(1 - \frac{3}{4}x)^{-2} + C = 2(1 - \frac{3}{4}x)^{-2} + C$$

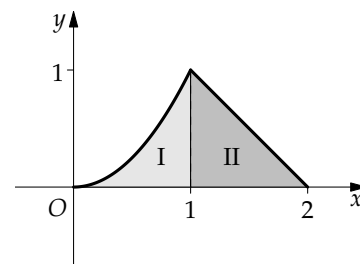
$$38. \int \frac{6}{1-\pi x} dx = -\frac{6}{\pi} \ln|1 - \pi x| + C$$

$$39. \int 6 + \frac{6}{x^2+1} dx = 6x + 6\arctan x + C$$

40. In figuur 16.4 zie je de grafiek van f . Volgens stelling 8.14 geldt:
 $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Dus

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x+2) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left(-2 + 4 - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$



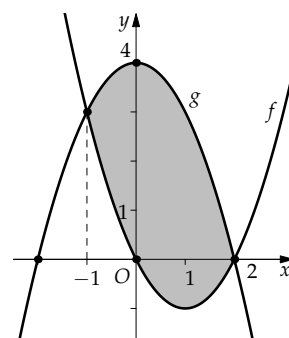
Figuur 16.4: De oppervlakte onder de grafiek bestaat uit twee gedeelten I en II, met $I = \int_0^1 x^2 dx$ en $II = \int_1^2 (-x+2) dx$

41. De grafiek van $f(x) = x(x-2)$ is een dalparabool met nulpunten bij $x = 0$ en $x = 2$, en de grafiek van $g(x) = (2-x)(2+x)$ is een bergparabool met nulpunten bij $x = \pm 2$.

Uit $f(x) = g(x)$ volgt $x^2 - 2x = 4 - x^2$, dus $2x^2 - 2x - 4 = 0$, oftewel $x^2 - x - 2 = 0$, dus $(x-2)(x+1) = 0$. Dus f en g hebben snijpunten bij $x = -1$ en bij $x = 2$. De grafiek van f en g zie je in figuur 16.5.

De oppervlakte van het ingesloten gebied is

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 g(x) - f(x) dx &= \int_{-1}^2 4 - x^2 - (x^2 - 2x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9 \end{aligned}$$

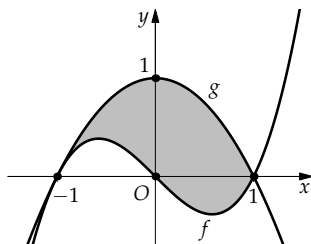


Figuur 16.5: $f(x) = x^2 - 2x$ en $g(x) = 4 - x^2$

42. Uit $f(x) = 0$ volgt $x(x^2 - 1) = 0$, dus heeft f nulpunten bij $x = 0$ en $x = \pm 1$. Uit $g(x) = 0$ volgt $-x^2 + 1 = 0$, dus heeft g nulpunten bij $x = \pm 1$. De nulpunten bij $x = \pm 1$ zijn dus tevens snijpunten van f en g , zie figuur 16.6.

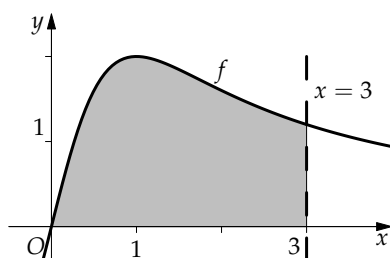
De oppervlakte van het ingesloten gebied is

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-1}^1 -x^2 + 1 - (x^3 - x) dx \\ &= \int_{-1}^1 -x^3 - x^2 + x + 1 dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{2}{3} + 2 = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$



Figuur 16.6: $f(x) = x^3 - x$ en $g(x) = -x^2 + 1$

43. Stel $p = 6 - \frac{1}{2}x$, dan is $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2}$, dus $dx = -2 dp$. Substitueren levert $\int (6 - \frac{1}{2}x)^5 dx = \int p^5 \cdot -2 dp = -2 \cdot \frac{1}{6} p^6 + C = -\frac{1}{3} (6 - \frac{1}{2}x)^6 + C$
44. Stel $p = 4x + 2$, dan is $\frac{dp}{dx} = 4$, dus $dx = \frac{1}{4} dp$. Substitueren:
 $\int \frac{6}{(4x+2)^4} dx = \int 6p^{-4} \cdot \frac{1}{4} dp = \frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{3} p^{-3} + C = -\frac{1}{2(4x+2)^3} + C$
45. Stel $p = x^2 + 3x + 5$, dan is $\frac{dp}{dx} = 2x + 3$, dus $(2x + 3) dx = dp$. Substitueren levert $\int 9(x^2 + 3x + 5)^2 (2x + 3) dx = \int 9p^2 dp = 3p^3 + C = 3(x^2 + 3x + 5)^3 + C$
46. Stel $p = 2x + 7$, dan is $\frac{dp}{dx} = 2$, dus $dx = \frac{1}{2} dp$. Invullen levert $\int (2x + 7)^5 dx = \int p^5 \frac{1}{2} dp = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} p^6 + C = \frac{1}{12} (2x + 7)^6 + C$
47. Stel $p = 4 - 2 \cos \varphi$, dan is $\frac{dp}{d\varphi} = 2 \sin \varphi$, dus $\sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} dp$. Invullen levert $\int (4 - 2 \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \int p^3 \frac{1}{2} dp = \frac{1}{2} \frac{1}{4} p^4 + C = \frac{1}{8} (4 - 2 \cos \varphi)^4 + C$
48. Stel $p = 4 - x^2$, dan is $\frac{dp}{dx} = -2x$, dus $x dx = -\frac{1}{2} dp$. Substitutie levert $\int x e^{4-x^2} dx = \int e^p \cdot -\frac{1}{2} dp = -\frac{1}{2} e^p + C = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + C$
49. Stel $p = 3x^2 - 5$, dan is $\frac{dp}{dx} = 6x$, dus $x dx = \frac{1}{6} dp$. Substitueren levert $\int x(3x^2 - 5) dx = \int p \cdot \frac{1}{6} dp = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} p^2 + C = \frac{1}{12} (3x^2 - 5)^2 + C$
50. Met de substitutie van opgave 49 wordt dit:
 $\int x(3x^2 - 5)^{50} dx = \int p^{50} \cdot \frac{1}{6} dp = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{51} p^{51} + C = \frac{1}{306} (3x^2 - 5)^{51} + C$
51. Zie eventueel opgave 8 uit hoofdstuk 7 voor het functieonderzoek van f . Het gevraagde gebied zie je in figuur 16.7.



Figuur 16.7: $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

De oppervlakte van het ingesloten gebied is $\int_0^3 \frac{4x}{x^2 + 1} dx$. Stel $p = x^2 + 1$, dan is $\frac{dp}{dx} = 2x$, dus $4x dx = 2 dp$. Substitueren levert

$$\int_0^3 \frac{4x}{x^2 + 1} dx = \int_{(0)}^{(3)} \frac{2}{p} dp = 2 \ln |p| \Big|_{(0)}^{(3)} = 2 \ln |x^2 + 1| \Big|_0^3 = 2 \ln 10 \approx 4.6052$$

52. Stel $p = x^2 + 9 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2x$, dus $2x dx = dp$. Substitueren:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \int \frac{1}{p} dp = \ln |p| + C = \ln(x^2 + 9) + C$$

Wegens $x^2 + 9 > 0$ zijn absoluutstrepen niet nodig.

53. Stel $p = x^2 + 9 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2x$, dus $x dx = \frac{1}{2} dp$. Als $x = 0$ is $p = 9$, als $x = 4$ is $p = 25$. Substitueren:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x}{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int_9^{25} \frac{1}{p^2 \sqrt{p}} \cdot \frac{1}{2} dp \\ &= \frac{1}{2} \int_9^{25} p^{-\frac{5}{2}} dp = \frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{3} p^{-\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{p \sqrt{p}} \Big|_9^{25} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{25 \cdot 5} - \frac{1}{9 \cdot 3} \right) \\ &= \frac{1}{81} - \frac{1}{375} = \frac{98}{10125} \approx 0.0096790 \end{aligned}$$

54. $\sqrt{-x}$ ziet er een beetje vreemd uit, maar het gaat goed omdat x tussen -16 en 0 ligt. Toch is het minteken onder de wortel vervelend. Dus stel $p = -x$, dan is $\frac{dp}{dx} = -1$, dus $dx = -1 dp$. Als $x = -16$, is $p = 16$. Als $x = 0$ is $p = 0$. Invullen levert

$$\begin{aligned} \int_{-16}^0 \sqrt{-x} dx &= \int_{16}^0 \sqrt{p} \cdot -1 dp = - \int_{16}^0 p^{1/2} dp \\ &= -\frac{2}{3} p^{3/2} \Big|_{16}^0 = 0 - -\frac{2}{3} \cdot 16^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot 16\sqrt{16} = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

55. Stel $p = x + 1 \Rightarrow dp = dx$ en $x = p - 1$.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x+1} dx &= \int (p-1) \sqrt{p} dp = \int p^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{1}{2}} dp = \frac{2}{5} p^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} (x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} + C \\ &= (x+1) \sqrt{x+1} \left(\frac{2}{5} (x+1) - \frac{2}{3} \right) + C \\ &= (x+1) \sqrt{x+1} \left(\frac{2}{5} x - \frac{4}{15} \right) + C \end{aligned}$$

56. Stel $p = \sqrt{x} \Rightarrow x = p^2$ en $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2p}$, dus $dx = 2p dp$. Dus:

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{p^2 + p} \cdot 2p dp = 2 \int \frac{1}{p+1} dp = 2 \ln |p+1| + C = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

Wegens $\sqrt{x} + 1 > 0$ zijn de absoluutstrepen niet nodig.

57. Deel teller en noemer van de integrand door a :

$$\frac{1}{x^2 + a} = \frac{1/a}{\frac{1}{a}x^2 + 1} = \frac{1/a}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x\right)^2 + 1}$$

Dit invullen in de integraal:

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x\right)^2 + 1} dx$$

Stel nu $p = \frac{1}{\sqrt{a}}x$, dus $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ en $dx = \sqrt{a} dp$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + a} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \sqrt{a} dp \\ &= \frac{\sqrt{a}}{a} \arctan p + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x\right) + C\end{aligned}$$

58. Neem $f(x) = x$ en $g'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x de^x = x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

59. Neem $f(x) = x$ en $g'(x) = e^{-2x}$.

$$\begin{aligned}\int x e^{-2x} dx &= \int x d\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\ &= x \cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

60. Neem $f(x) = x$ en $g'(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) \\ &= x \cdot -\cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

61. Stel $f(x) = \ln x$ en $g'(x) = x^2$, dan is

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3 d \ln x = \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

62. Stel $f(x) = \ln x$ en $g'(x) = \sqrt{x}$. Dan is

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} \int \ln x d(x^{3/2}) = \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} d \ln x \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

63. Bepaal eerst de gevraagde integraal $\int \ln^2 x dx$ zonder grenzen.

Neem $f(x) = \ln^2 x$ en $g'(x) = 1$ (als in voorbeeld 8.31)

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - \int x \, d \ln^2 x = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx\end{aligned}$$

De laatste integraal is standaard, zie paragraaf 8.24,

dus $\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C$.

Met grenzen:

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x)^2 \, dx &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \Big|_1^e \\ &= e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e - (1 \cdot \ln^2 1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot 1) \\ &= e - 2e + 2e - (0 - 0 + 2) = e - 2\end{aligned}$$

64. Je kunt de integrand splitsen in $x \sin x$ en $x \cos x$. De integraal $\int x \sin x \, dx$ staat in opgave 60 en de integraal $\int x \cos x \, dx$ staat in voorbeeld 8.29. Dus

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x(\sin x + \cos x) \, dx &= \int_0^\pi x \sin x \, dx + \int_0^\pi x \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + x \sin x + \cos x \Big|_0^\pi \\ &= -\pi \cos \pi + \sin \pi + \pi \sin \pi + \cos \pi - (-0 \cos 0 + \sin 0 + 0 \sin 0 + \cos 0) \\ &= \pi + 0 + 0 - 1 - (0 + 0 + 0 + 1) = \pi - 2\end{aligned}$$

65. Neem $f(x) = x^2$ en $g'(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} \, dx &= \int x^2 \, d(-e^{-x}) = x^2 \cdot e^{-x} - \int -e^{-x} \, dx^2 \\ &= -x^2 e^{-x} + \int e^{-x} \cdot 2x \, dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx\end{aligned}$$

Bereken de laatste integraal, $\int x e^{-x} \, dx$, apart:

$$\begin{aligned}\int x e^{-x} \, dx &= \int x \, d(-e^{-x}) \\ &= x \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x} \, dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C\end{aligned}$$

Dus

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C$$

66. Neem $f(x) = e^{2x}$ en $g'(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin x \, dx &= \int e^{2x} \, d(-\cos x) \\ &= e^{2x} \cdot -\cos x - \int -\cos x \, d(e^{2x}) \\ &= -e^{2x} \cos x + \int \cos x \cdot 2e^{2x} \, dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx\end{aligned}$$

(*)

Neem de laatste integraal, $\int e^{2x} \cos x \, dx$, apart:

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \int e^{2x} d \sin x = e^{2x} \sin x - \int \sin x d(e^{2x}) = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx$$

Merk op dat de laatste integraal identiek is aan die van de opgave. Het lijkt alsof je niets bent opgeschoten, maar dit resultaat invullen in (*) levert

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx)$$

Stel nu $I = \int e^{2x} \sin x \, dx$. Dan geldt dus:

$$I = -e^{2x} \cos x + 2(e^{2x} \sin x - 2I)$$

Oftewel

$$5I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x$$

Dus

$$I = -\frac{1}{5}e^{2x} \cos x + \frac{2}{5}e^{2x} \sin x$$

Conclusie:

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -\frac{1}{5}e^{2x} \cos x + \frac{2}{5}e^{2x} \sin x + C$$

$$\begin{aligned} 67. \int \arccos x \, dx &= \arccos x \cdot x - \int x d \arccos x = x \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

Stel $p(x) = 1 - x^2$, dan is $\frac{dp}{dx} = -2x$, dus $x \, dx = -\frac{1}{2}dp$. Substitueren in de laatste integraal levert:

$$= x \arccos x - \int \frac{1}{2\sqrt{p}} dp = x \arccos x - \sqrt{p} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Dus

$$\int \arccos x = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\begin{aligned} 68. \int \arctan x \, dx &= \arctan x \cdot x - \int x d \arctan x = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

Stel $p(x) = 1 + x^2$, dan is $\frac{dp}{dx} = 2x$, dus $x \, dx = \frac{1}{2}dp$. Substitueren in de laatste integraal levert

$$= x \arctan x - \int \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2} dp = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Dus

$$\int \arctan x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Wegens $1+x^2 > 0$ zijn absoluutstrepen in $\ln(1+x^2)$ niet nodig.

$$69. \int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| + C$$

$$70. \int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$71. \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

72. Stel $p = ax + b$, dan is $\frac{dp}{dx} = a$ en $dx = \frac{1}{a} dp$. Dus

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{p^n} dp = \frac{1}{a} \int p^{-n} dp \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-n+1} p^{-n+1} + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-n+1} (ax+b)^{-n+1} + C \\ &= \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C \end{aligned}$$

$$73. \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx, \text{ met opgave 57 volgt:}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{\sqrt{4}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{4}}(x+1) \right) + C = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2}(x+1) \right) + C$$

$$74. \int \frac{1}{2x^2-8x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx$$

Met opgave 57 volgt nu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{1}}(x-2) \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan (x-2) + C \end{aligned}$$

75. Merk op dat de teller van de integrand de afgeleide is van de noemer. Stel $p = x^2 + 2x + 5$, dan is $\frac{dp}{dx} = 2x + 2$ en dus $2x + 2 dx = dp$. Invullen

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{p} dp = \ln |p| + C = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Omdat $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$, zijn absoluutstrepen in $\ln(x^2+2x+5)$ niet nodig.

76. De integrand kun je splitsen in die van opgave 75 en die van opgave 73:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2}(x+1) \right) + C \end{aligned}$$

77. Het zou mooi zijn als in de teller $2x + 2$ (de afgeleide van de noemer) komt te staan. Vermenigvuldig daartoe teller en noemer met 2:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{4}{x^2+2x+5} dx \end{aligned}$$

Met opgave 75 en 73 volgt nu:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \arctan \left(\frac{1}{2}(x+1) \right) + C$$

78. Het zou prettig zijn als in de teller $2x + 2$ komt te staan (dat is de afgeleide van de noemer). Nu is $-x = -\frac{1}{2}(2x + 2) + 1$. Dus

$$\int \frac{-x}{x^2 + 2x + 5} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

Met opgave 75 en 73 volgt nu:

$$\int \frac{-x}{x^2 + 2x + 5} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) + C$$

79. Neem $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $g'(x) = 1$ (als in voorbeeld 8.31)

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int x d \ln(x^2 + 1) \\ &= x \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

De laatste integrand is een rationale functie. Een staartdeling levert

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

De integrand is in deze vorm makkelijk te integreren, omdat er twee standaardfuncties staan:

$$\int 1 - \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \arctan x + C$$

Dus

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C$$

80. De graad van de teller is hoger dan die van de noemer. Een staartdeling levert

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 16}{x^2 - 4} = 2x - 5 + \frac{4x - 4}{x^2 - 4}$$

De noemer $x^2 - 4$ kun je ontbinden in $(x - 2)(x + 2)$, dus stel

$$\frac{4x - 4}{x^2 - 4} = \frac{4x - 4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

Links en rechts met $(x - 2)(x + 2)$ vermenigvuldigen leidt tot

$$4x - 4 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

Uit $x = -2$ volgt $-12 = -4B$, dus $B = 3$.

Uit $x = +2$ volgt $4 = 4A$, dus $A = 1$.

Dus $\frac{4x - 4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 2}$.

Nu nog integreren:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 16}{x^2 - 4} dx &= \int 2x - 5 + \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 2} dx \\ &= \int 2x - 5 dx + \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{3}{x + 2} dx \\ &= x^2 - 5x + \ln|x - 2| + 3 \ln|x + 2| + C \end{aligned}$$

81. De graad van de noemer is lager dan die van de teller, en de noemer is al ontbonden. Dus stel

$$\frac{4x^2 - 2x + 6}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Links en rechts met $(x+3)(x-1)^2$ vermenigvuldigen leidt tot

$$4x^2 - 2x + 6 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x+3)$$

Uit $x = -3$ volgt $36 + 6 + 6 = 16A$, en dus $A = 3$

Uit $x = 1$ volgt $4 - 2 + 6 = 4C$, en dus $C = 2$

Als je $A = 3$ invult, en links en rechts de coëfficiënten van x^2 vergelijkt, krijg je

$$4x^2 \dots = 3x^2 \dots + Bx^2 \dots$$

Dus $4 = 3 + B$, oftewel $B = 1$. Nu nog integreren:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 2x + 6}{(x+3)(x-1)^2} dx &= \int \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} dx \\ &= 3 \ln|x+3| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C_1 \end{aligned}$$

82. De graad van de noemer is lager dan die van de teller, en de noemer is al ontbonden. De kwadratische term in de noemer is irreducibel. Stel

$$\frac{4x^2 - x + 17}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

Links en rechts met $(x-1)(x^2+9)$ vermenigvuldigen levert

$$4x^2 - x + 17 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x-1)$$

$x = 1$ invullen, betekent $4 - 1 + 17 = 10A$, dus $A = 2$.

$A = 2$ invullen, en de haakjes uitwerken leidt tot

$$4x^2 - x + 17 = 2x^2 + 18 + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

Coëfficiënten van gelijksoortige termen vergelijken:

Coëfficiënten van x^2 : $4 = 2 + B$, dus $B = 2$.

Coëfficiënten van x : $-1 = -B + C$, dus $C = 1$. Nu kun je integreren:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - x + 17}{(x-1)(x^2+9)} dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+9} dx \\ &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= 2 \ln|x-1| + \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \end{aligned}$$

Zie ook opgave 52 en opgave 57

83. De noemer is ontbonden in tweevoudige irreducibele factor. Stel

$$\frac{2x^3 + 16x}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$$

Beide kanten met $(x^2 + 9)^2$ vermenigvuldigen levert

$$2x^3 + 16x = (Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D$$

Haakjes uitwerken

$$2x^3 + 16x = Ax^3 + Bx^2 + 9Ax + 9B + Cx + D$$

Coëfficiënten vergelijken levert meteen $A = 2$ en $B = 0$. Deze waarden invullen levert $C = -2$ en $D = 0$. Dus

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 16x}{(x^2 + 9)^2} dx &= \int \frac{2x}{x^2 + 9} - \frac{2x}{(x^2 + 9)^2} dx \\ &= \ln(x^2 + 9) + \frac{1}{x^2 + 9} + C_3 \end{aligned}$$

84. Partieel integreren levert

$$\begin{aligned} \int (1-x)e^{-x} dx &= \int (1-x) d(-e^{-x}) = -(1-x)e^{-x} - \int -e^{-x} d(1-x) \\ &= -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x} dx \\ &= -(1-x)e^{-x} + e^{-x} + C \\ &= xe^{-x} + C \end{aligned}$$

Verder is

$$\int_1^\infty (1-x)e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} xe^{-x} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{e^R} - \frac{1}{e} = 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

Zie standaardlimiet 7 in paragraaf 5.17.

85. De integrand is een continue even functie, dus je kunt volstaan met het berekenen van $\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$.

Stel $p = e^x$, dan is $\frac{dp}{dx} = e^x = p$, dus $dx = \frac{1}{p} dp$. Substitueren levert

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{p + \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p} dp \\ &= \int \frac{1}{p^2 + 1} dp = \arctan p + C = \arctan e^x + C \end{aligned}$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan e^x \Big|_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan e^R - \arctan e^0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dus $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2}$

86. De integrand is discontinu in $x = -1$ en in $x = 0$. Alleen $x = 0$ ligt in het integratie-interval. Splits de integraal bijvoorbeeld bij $x = 1$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$$

Stel $p = \sqrt{x}$, dan is $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dus $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 dp$ en $x = p^2$.

Substitueren:

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{p^2+1} \cdot 2 dp = 2 \arctan p + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C$$

Dus

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \downarrow 0} 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_a^1 + \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_1^R \\ &= 2 \arctan 1 - 2 \arctan 0 + 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan \sqrt{R} - 2 \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \pi$$

87. De integrand is discontinu in beide grenzen van het integratie-interval. De integrand heeft $\arcsin x$ als primitieve. Er geldt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{a \downarrow -1} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{b \uparrow 1} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 0 - \lim_{a \downarrow -1} \arcsin a + \lim_{b \uparrow 1} \arcsin b - 0 \\ &= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

88. De integrand is discontinu voor $x = 0$. Er geldt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{b \uparrow 0} \int_{-1}^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{b \uparrow 0} \frac{\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^b \\ &= \lim_{b \uparrow 0} \frac{3}{2} b^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} (-1)^{\frac{2}{3}} = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \quad (-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

89. Met partiële integratie vind je $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$, zie opgave 58. Dus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x e^x dx &= \lim_{R \rightarrow -\infty} (x e^x - e^x) \Big|_R^0 \\ &= 0 \cdot e^0 - e^0 - \lim_{R \rightarrow -\infty} (x e^R - e^R) \end{aligned}$$

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Zie standaardlimiet 8 in paragraaf 5.17.

$$\text{Dus } \int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1$$

90. De integrand heeft een oneindige discontinuïteit bij $x = 0$. Een primitieve van $\ln x$ is $x \ln x - x$, zie voorbeeld 8.31. Dus

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{a \downarrow 0} (x \ln x - x) \Big|_a^1 \\ &= 1 \cdot \ln 1 - 1 - \lim_{a \downarrow 0} (a \ln a - a) \end{aligned}$$

Er geldt $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$, dus ook $\lim_{a \downarrow 0} (a \ln a - a) = 0$.

Zie standaardlimiet 6 in paragraaf 5.17.

$$\text{Dus } \int_0^1 \ln x dx = -1$$

91. De integrand is discontinu in $x = 2$, middenin het integratie-interval. Dus

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{1}{x-2} dx &= \int_{-1}^2 \frac{1}{x-2} dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \int_{-1}^b \frac{1}{x-2} dx + \lim_{a \downarrow 2} \int_a^3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \ln |x-2| \Big|_{-1}^b + \lim_{a \downarrow 2} \ln |x-2| \Big|_a^3 \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \ln |b-2| - \ln |-3| + \ln |1| - \lim_{a \downarrow 2} \ln |a-2|\end{aligned}$$

Zowel $\lim_{b \uparrow 2} \ln |b-2|$ als $\lim_{a \downarrow 2} \ln |a-2|$ is divergent, dus is ook

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x-2} dx \text{ divergent.}$$

92. Net als bij de vorige opgave is de integrand discontinu in $x = 2$.

Een primitieve van $\frac{1}{(x-2)^2} = (x-1)^{-2}$ is $-(x-2)^{-1} = \frac{-1}{x-2}$.

Dus

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx &= \int_{-1}^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \int_{-1}^b \frac{1}{(x-2)^2} dx + \lim_{a \downarrow 2} \int_a^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \frac{-1}{x-2} \Big|_{-1}^b + \lim_{a \downarrow 2} \frac{-1}{x-2} \Big|_a^3 \\ &= \lim_{b \uparrow 2} \frac{-1}{b-2} - \frac{1}{3} - 1 - \lim_{a \downarrow 2} \frac{-1}{a-2}\end{aligned}$$

Zowel $\lim_{b \uparrow 2} \frac{-1}{b-2}$ als $\lim_{a \downarrow 2} \frac{-1}{a-2}$ is divergent, dus is ook $\int_{-1}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ divergent.

93. $\int_1^e \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^e = e \ln e - e - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 0 - (0 - 1) = 1$

94. $\int_1^e {}^{10}\log x dx = \int_1^e \frac{\ln x}{\ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10} \int_1^e \ln x dx \stackrel{\text{zie opgave 93}}{=} \frac{1}{\ln 10} \cdot 1 = \frac{1}{\ln 10}$

95. Stel dat $F(x)$ een primitieve is van $f(x)$, en $a \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{S \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_S^a + \lim_{R \rightarrow \infty} F(x) \Big|_a^R \\ &= F(a) - \lim_{S \rightarrow -\infty} F(x) + \lim_{R \rightarrow \infty} F(x) - F(a) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{S \rightarrow -\infty} F(x)\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking is onafhankelijk van a , dus welke waarde je voor a kiest maakt niet uit.

96. Als $p > 1$ geldt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-p+1} R^{-p+1} \right) - \frac{1}{-p+1} \\ &= \frac{1}{-p+1} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^{p-1}} \right) - \frac{1}{-p+1} \\ &= \frac{1}{-p+1} \cdot 0 - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

Wegens $p > 1$ is $p-1 > 0$, en dus is $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^{p-1}} \right) = 0$

Voor $p = 1$ geldt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R) - \ln 1 = \infty - 0 = \infty$$

Als $p < 1$ geldt (net als bij $p > 1$):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{-p+1} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^{-p+1} \right) - \frac{1}{-p+1}$$

Wegens $p < 1$ is $p-1 < 0$, en dus is $-p+1 > 0$. Hieruit volgt dat $\lim_{R \rightarrow \infty} (R^{-p+1}) = \infty$.

Dus voor $p \leq 1$ is de integraal divergent, en voor $p > 1$ convergent met waarde $\frac{1}{p-1}$.

97. Voor $p < 1$ geldt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \int_0^1 x^{-p} dx = \lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 x^{-p} dx = \lim_{a \downarrow 0} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_a^1 \\ &= \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \lim_{a \downarrow 0} a^{-p+1}\end{aligned}$$

Wegens $p < 1$ is $p-1 < 0$, en dus $-p+1 > 0$. Hieruit volgt dat $\lim_{a \downarrow 0} a^{-p+1} = 0$.

Dus de integraal is convergent met waarde $\frac{1}{-p+1} = \frac{1}{1-p}$.

Voor $p = 1$ geldt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \downarrow 0} \ln x \Big|_a^1 = \ln 1 - \lim_{a \downarrow 0} \ln a = 0 - (-\infty) = \infty$$

Voor $p > 1$ geldt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \lim_{a \downarrow 0} a^{-p+1}$$

Uit $p > 1$ volgt $p-1 > 0$ en dus $-p+1 < 0$. En dus bestaat $\lim_{a \downarrow 0} a^{-p+1}$ niet.

De integraal is dus divergent voor $p \geq 1$ en convergent voor $p < 1$ met waarde $\frac{1}{1-p}$.